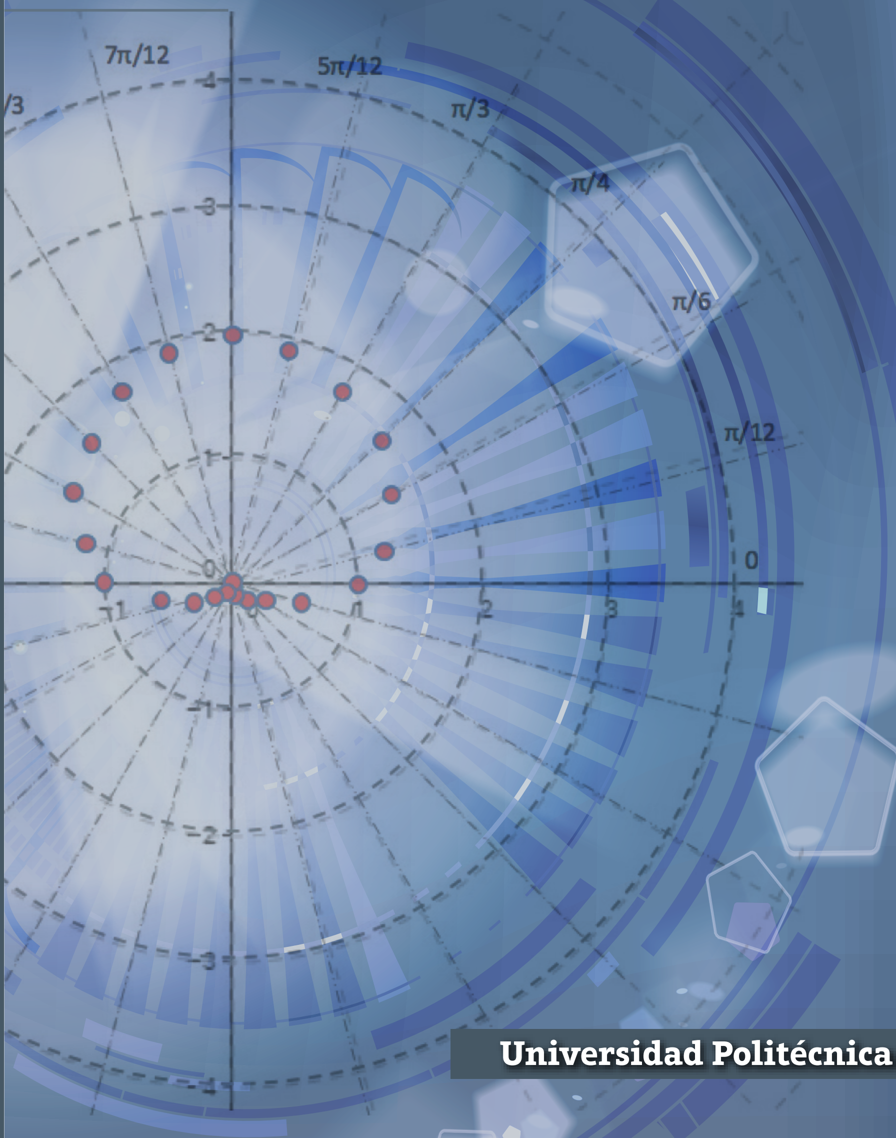
Fernando Araujo Rodríguez

CÁLCULO INTEGRAL



Universidad Politécnica Salesiana

CÁLCULO INTEGRAL

Fernando Araujo Rodríguez

CÁLCULO INTEGRAL



2018

CÁLCULO INTEGRAL

1ra edición:	Universidad Politécnica Salesiana Av. Turuhuayco 3-69 y Calle Vieja Cuenca-Ecuador Casilla: 2074 P.B.X. (+593 7) 2050000 Fax: (+593 7) 4 088958 e-mail: rpublicas@ups.edu.ec www.ups.edu.ec
	Área de Ciencia y Tecnología CARRERA DE COMPUTACIÓN
Diagramación, diseño y edición:	Editorial Universitaria Abya-Yala Quito-Ecuador
Derechos de autor:	053095
ISBN UPS:	978-9978-10-295-4
Tiraje:	300 ejemplares
Impresión:	Editorial Universitaria Abya-Yala Quito-Ecuador

Impreso en Quito-Ecuador, abril de 2018

Publicación arbitrada de la Universidad Politécnica Salesiana

Índice

Índice de Tablas

Índice de figuras

Contenido

Dedicatoria

Dedico el esfuerzo realizado al escribir este libro, a Dios a quien debo lo que soy y lo que tengo, a mi familia: mi madre y mi padre que ya no están con nosotros, quienes fueron el puntal principal en mi formación como persona y como profesional; a mi hermana, mis hijos, nietos y sobrinas, quienes son parte muy importante en mi vida.

Agradecimiento

Agradezco a las autoridades de la Universidad Politécnica Salesiana, en especial, al Padre Javier Herrán y al Ing. Javier Ortiz, quienes creyeron e impulsaron la creación de este libro. A los creadores de software de graficación de funciones (Fooplot, Wolfram Alpha, Geogebra) que se usaron en varios de los gráficos de este libro y a la estudiante Andrea Jiménez, quien colaboró en el tipeado del solucionario de este libro.

Prefacio

Este libro fue creado para estudiantes de ingeniería, que van a usar el Cálculo durante su carrera universitaria, o como herramienta en la solución de problemas. Por tanto se le dio una orientación más práctica y menos formal en lo matemático. No profundiza en demostraciones matemáticas de teoremas o en el lenguaje matemático, que para la mayoría de los estudiantes de ingeniería resulta abstracto y confuso.

Está dividido en cinco capítulos: los dos primeros capítulos abordan la parte de técnicas de integración, en donde el estudiante aprende a integrar una gran cantidad de funciones diferentes.

El tercer capítulo estudia la integral definida como una introducción al capítulo cuatro que trata sobre la aplicación de las integrales en la solución de problemas de física e ingeniería.

El último capítulo, trata sobre las ecuaciones paramétricas y funciones en coordenadas polares como otras herramientas que se usan en matemáticas para la solución de problemas, en donde el estudiante aplica lo aprendido en el curso previo de Cálculo Diferencial, así como en la parte previa a este capítulo.

Cada capítulo cuenta con una parte teórica introductoria, una sección de problemas resueltos, explicados paso a paso hasta llegar a la respuesta sin importar el nivel de avance del estudiante, de tal manera que el estudiante está constantemente revisando temas anteriores necesarios para la solución y por último, una parte de problemas propuestos todos con respuesta para que sirva de retroalimentación para el alumno que lo está resolviendo.

Además el libro contiene, al final, tablas con fórmulas que necesitará durante el desarrollo de la materia, tablas de integrales para la solución rápida una vez que ha aprendido el proceso de integración.

Capítulo 1
Integral Indefinida

El Cálculo fue desarrollado para resolver problemas como encontrar la pendiente de una curva en un punto, o el área bajo ella, la velocidad de un cuerpo en un cierto instante sabiendo la distancia, o caso contrario, sabiendo la velocidad, encontrar la distancia recorrida. Estas fueron una de las muchas aplicaciones por la que científicos como Issac Newton (1643-1727) o Gottfried Leibniz (1646-1716) desarrollaron el Cálculo Integral y el Cálculo Diferencial.

En la actualidad, el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral constituyen materias obligatorias en cualquier carrera de Ingeniería por ser herramientas poderosas para resolver problemas de aplicación en la ingeniería e incluso en otras disciplinas como la Biología o la Economía.

1.1 Antiderivada y Constante de Integración

A estas alturas de su formación, el estudiante de ingeniería ya está familiarizado con operaciones contrarias como la suma y resta, la multiplicación y división, la potenciación y la radicación. Igual de opuestas constituyen las operaciones de Diferenciación e Integración.

En Cálculo Diferencial vimos que la derivada de una función f se la expresaba como f' y era otra función que se la podía representar como g, es decir,

$$\frac{d}{dx}[f_{(x)}] = g_{(x)}$$

que si la escribimos como diferencial, queda como

$$d[f_{(x)}] = g_{(x)}dx$$

Debe haber entonces una operación contraria que nos lleve de g a f. A esta operación se la llama “Antiderivada” o “Integral” y se la representa con el símbolo $\int$. Así por ejemplo, la derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x)=2x$ que como dijimos antes es otra función y la vamos a llamar $g(x)=2x$. Según el razonamiento anterior, la antiderivada de g debería ser la función original f, esto es,

$$\int 2x\,dx = x^2$$

lo cual es verdad, y x^2 es la función original. Pero hay un problema, que pasa si la función original ahora es $f(x)=x^2+3$, y la derivada también es $f(x)=2x$. Cómo puede entonces la antiderivada de una función (en este ejemplo $2x$), tener como resultado dos funciones diferentes (x^2 en el primer ejemplo y x^2+3 en el segundo ejemplo). Para solucionar este inconveniente, se usa lo que se conoce en Integrales como la *Constante de Integración* y se la representa con la letra C.

Así, para el primer ejemplo donde la función original era x^2 y la función a integrar era $2x$:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

y para regresar a la función original hacemos $C=0$

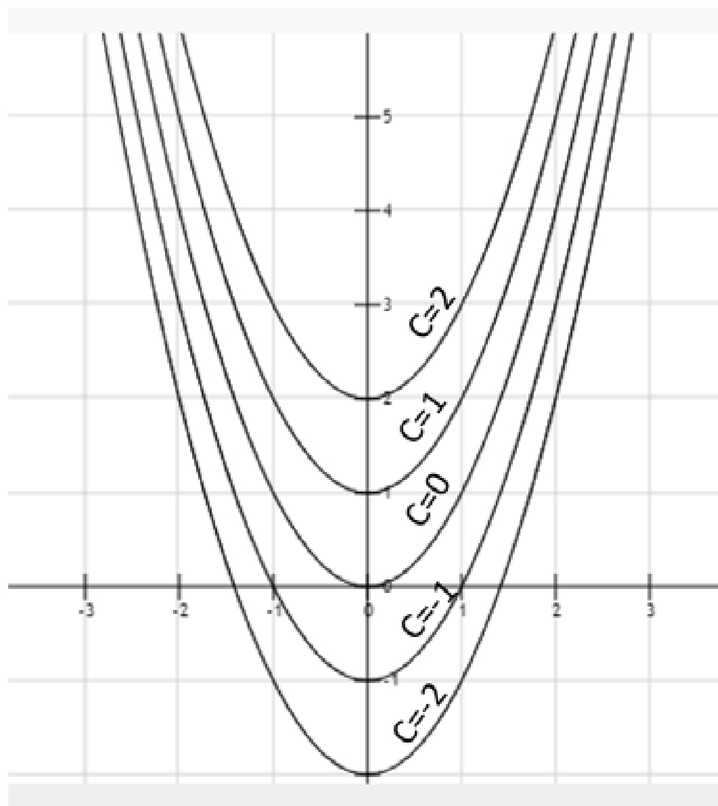
Para el segundo caso

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

y para regresar a la función original hacemos $C=3$

Como se puede apreciar, C puede tomar cualquier valor formando una *familia de curvas*. Esto se puede representar gráficamente como se muestra en la figura 1.

Figura 1
Familia de curvas para diferentes valores de C



En general podemos decir por ejemplo que:

si $f(x)=senx$, $f'(x)=cosx$, por tanto $\int cosx\,dx=senx+C$.

Si $f(x)=e^x$, $f'(x)=e^x$, por tanto $\int e^x dx=e^x+C$

En la Tabla 9 se detallan algunas fórmulas directas de integración ya desarrolladas

1.2 Integración de Formas Elementales

Como ya se dijo, integrar es el proceso contrario a derivar. En la tabla 1 que se muestra a continuación, hay algunas fórmulas que sirven para integrar directamente.

Ejercicio 1

$$\int x^3 dx$$

Solución: En este caso, aplicamos la fórmula 2 de la Tabla 1 haciendo n=3

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$$

Comprobación: Derivando el resultado se debe regresar a la integral original

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4} + C\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{d}{dx}(C) = \frac{1}{4}\frac{d}{dx}x^4 + 0 = \frac{1}{4}(4)x^3 = x^3$$

Ejercicio 2

$$\int \frac{1}{x^4} dx$$

Solución: Aplicamos la misma fórmula del ejercicio anterior, esta vez haciendo n= -4

$$\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{x^{-3}}{3} + C$$

Comprobación

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^{-3}}{3} + C\right) = -\frac{1}{3}\frac{d}{dx}(x^{-3}) + \frac{d}{dx}(C) = -\frac{1}{3}(-3)x^{-4} + 0 = \frac{1}{x^4}$$

Ejercicio 3

$$\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$$

Comprobación: Se la deja al estudiante

Ejercicio 4

$$\int (sen^2x + cos^2x)dx$$

Aplicando la identidad trigonométrica $sen^2x + cos^2x = 1$

$$\int (sen^2x + cos^2x)dx = \int dx = x + C$$

Comprobación:

$$\frac{d}{dx}(x + C) = 1$$

Aplicando la identidad trigonométrica mencionada se llega a la integral original

Tabla 1
Tabla de integrales básicas

$1.- \int dx = x + C$	$2.- \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$3.- \int \frac{1}{x}dx = ln\|x\| + C$	$4.- \int e^x dx = e^x + C$
$5.- \int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$	$6.- \int senx\,dx = -cosx + C$
$7.- \int cosx\,dx = senx + C$	$8.- \int sec^2x\,dx = tgx + C$
$9.- \int csc^2x\,dx = -cotgx + C$	$10.- \int secx\,tgx\,dx = -secx + C$
$11.- \int cscx\,cotgx\,dx = -cscx + C$	$12.- \int tgx\,dx = -ln\|cosx\| + C$

$13.-\int cotgx\,dx = ln|senx| + C$

$14.-\int secx\,dx = ln|secx + tgx| + C$

$15.-\int cscx\,dx = ln|csx — cotgx| + C$

$16.-\int \frac{1}{\sqrt{a^2\text{-}x^2}}dx = arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + C$

$17.-\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C$

$18.-\int \frac{1}{x\sqrt{a^2\text{-}x^2}}dx = \frac{1}{a}arcsen\left(\frac{|x|}{a}\right) + C$

$19.-\int senhx\,dx = coshx + C$

$20.-\int coshx\,dx = senhx + C$

Existen dos propiedades muy usadas en la solución de ejercicios de cálculo integral que son:

Propiedad 1.1

El integral de las suma o resta de dos más funciones es igual a la suma o resta de la integral de cada una de esas funciones.

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Propiedad 1.2

El integral de la multiplicación de una constante por una función es igual a la multiplicación de dicha constante por el integral de la función.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx; \quad k \in R$$

Ejercicio 1

$$\int \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{\pi sec^2x}{4} — \frac{e}{x^2+5}\right]dx$$

Aplicando la propiedad 1.1 la integral anterior podemos descomponerla en tres integrales más sencillas

$$\int \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{\pi sec^2x}{4} — \frac{e}{x^2+5}\right]dx = \int \left(\frac{3}{2}\right)^x dx + \int \frac{\pi sec^2x}{4}dx — \int \frac{e}{x^2+5}dx$$

$$\int \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{ln\left(\frac{3}{2}\right)} + C_1$$

$$\int \frac{\pi sec^2 x}{4} dx = \frac{\pi}{4} tgx + C_2$$

$$\int \frac{e}{x^2+5} dx = e\int \frac{1}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} dx = \frac{e}{\sqrt{5}} arctg\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C_3$$

$$\int \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{\pi sec^2 x}{4} - \frac{e}{x^2+5}\right] dx = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{ln\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{\pi}{4} tgx - \frac{e}{\sqrt{5}} arctg\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$Siendo\ C = C_1 + C_2 + C_3$

Capítulo 2
Técnicas de integración

En la mayor parte de los casos, las funciones no se las puede integrar usando directamente las fórmulas de la Tabla 1. Para estos casos existen técnicas que nos permiten hacer manipulaciones hasta llegar a la aplicación directa de la fórmula. Estas técnicas se las presenta a continuación.

2.1 Cambio de variable

En muchas ocasiones, la integración de una función puede ser tremendamente larga, sin embargo un adecuado reemplazo de la variable original por otra, puede simplificar enormemente el trabajo, por ejemplo:

Ejercicio 1

$$\int 6x(4x^2+8)^{10}dx$$

Si se quiere resolver esta integral aplicando alguna o algunas de las fórmulas de la Tabla 1, habría que resolver el paréntesis multiplicando 10 veces el mismo integral para luego multiplicar ese resultado por 6x. Este es un procedimiento muy largo, lo recomendable es hacer una sustitución. En este caso la sustitución recomendada es hacer

$$u = 4x^2 + 8 \quad y\ por\ tanto\ du = 8xdx$$

Despejando dx,

$$dx = \frac{du}{8x}$$

Y reemplazando en la integral original se tiene:

$$\int 6xu^{10}\frac{du}{8x} = \frac{3}{4}\int u^{10}du = \frac{3}{4}\left(\frac{u^{11}}{11}\right) + C = \frac{3}{44}u^{11} + C$$

Reemplazando u para regresar a la variable original, se tiene que el resultado de la integral es:

$$\int 6x(4x^2 + 8)^{10}dx = \frac{3}{44}(4x^2 + 8)^{11} + C$$

El estudiante puede comprobar este resultado como ya se ha sugerido anteriormente.

Como se puede apreciar, con un apropiado cambio de variable, el proceso de integración puede simplificarse mucho. Veamos estos otros ejercicios.

Ejercicio 2

$$\int sen2xdx$$

En este caso, ya que la fórmula dice *senx*, habrá que buscar una sustitución apropiada para usar la fórmula (6). La sustitución más conveniente entonces es *u=2x*.

$$Sea\ u = 2x, \qquad du = 2dx, \qquad dx = \frac{du}{2}$$

$$\int sen2xdx = \int \frac{1}{2}senudu = -\frac{1}{2}cosu + C = -\frac{1}{2}cos2x + C$$

Se recomienda al estudiante realizar el ejercicio con *sen3x, sen4x, cos2x, cos3x* y sacar sus conclusiones.

Ejercicio 3

$$\int senxcosxdx$$

Con un poco de práctica, el estudiante puede llegar a reconocer casos como éste en donde una función tiene como derivada la otra función, entonces la sustitución recomendada es

$$u = senx, \quad du = cosxdx$$

La integral se convierte en

$$\int udu = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}sen^2x + C$$

Ejercicio 4

$$\int \sqrt{\frac{arcsenx}{1-x^2}}dx$$

(801 ejercicios resueltos de integral indefinida, pág. 31)

$$u = arcsenx, \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \sqrt{\frac{arcsenx}{1-x^2}}dx = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(u)^3} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(arcsenx)^3} + C$$

En ocasiones puede ser necesario más de un cambio de variable como se aprecia en el siguiente ejercicio:

Ejercicio 5

$$\int \frac{(3lnx-5)^4}{x}dx$$

(Métodos de integración, (http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo2/metodos.pdf, pág. 6)

$Sea\ u = lnx, \quad du = \dfrac{dx}{x}$

$$\int (3u-5)^4 du$$

$Sea\ v = 3u\text{-}5, \;\; dv = 3du, \quad du = \dfrac{1}{3}dv$

$$\int \frac{1}{3}v^4 dv = \frac{1}{3}\frac{v^5}{5} + C = \frac{1}{15}(3u-5)^5 + C = \frac{1}{15}(3lnx-5)^5 + C$$

Ejercicios propuestos

1.	$\int cos^4x\ senx\ dx$	$R:\ -\dfrac{cos^5x}{5} + C$
2.	$\int \left[\dfrac{1}{2x-1} - \dfrac{1}{2x+1}\right] dx$	$R: ln\sqrt{\left\|\dfrac{2x-1}{2x+1}\right\|} + C$
3.	$\int \dfrac{6e^{1/x}}{x^2} dx$	$R: -6e^{\frac{1}{x}} + C$
4.	$\int tg\left(\dfrac{x}{2}\right) sec^2\left(\dfrac{x}{2}\right) dx$	$R: sec^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$
5.	$\int \dfrac{senx}{1-cosx} dx$	$R: ln\|1-cosx\| + C$
6.	$\int e^{tg2x}\ sec^2 2xdx$	$R: \dfrac{1}{2}e^{tg2x} + C$
7.	$\int x^3\ e^{x^4} dx$	$R: \dfrac{1}{4}e^{x^4} + C$
8.	$\int \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{1+2x}} dx$	$R: \dfrac{3}{64}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^8 - \dfrac{3}{20}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^5 + \dfrac{3}{16}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2 + C$
9.	$\int \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$	$R: \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 - \sqrt{x^2+1} + C$

10.	$\int \frac{1}{x^3}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}dx$	$R{:}\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^3}+C$
11.	$\int arccotgxdx$	$R{:}\,xarccotgx\ —\frac{1}{2}ln\lvert 1+x^2\rvert+C$
12.	$\int e^{3x}\,sen2x\,dx$	$R{:}\frac{1}{13}e^{3x}(3sen2x\ —2cos2x)+C$
13.	$\int \frac{x}{e^x}dx$	$R{:}\,\text{-}e^{-x}(1\ —x)+C$

2.2 Integración por partes

Si el método de cambio de variables no da resultado, otro método que se puede usar es el de integración. Este método se basa en la fórmula para diferenciación de un producto de funciones.

Sean u y v dos funciones derivables, entonces la diferenciación del producto de esas dos funciones es:

$$d(uv)=udv+vdu$$

Despejando el primer término del lado derecho de la ecuación,

$$udv=d(uv)\text{-}vdu$$

Integrando ambos lados de la ecuación,

$$\int udv=\int d(uv)\text{ - }\int vdu$$

Ya que la integración y la diferenciación son dos procesos inversos, el primer término del lado derecho de la ecuación queda como el producto de las funciones u y v,

$$\int udv=uv\text{-}\int vdu$$

que es la fórmula que se usa en el método de Integración por Partes.

Ejercicio 1

$$\int xsenx\,dx$$

El éxito de este método en muchos casos se basa en la elección apropiada de que cosa es *u* y que cosa es *dv*.

$$Sea\ u = x, entonces\ el\ resto\ será\ dv = senx\,dx$$

Para aplicar la fórmula se necesitará calcular *v* y *du.* Para calcular *v* se integra *dv* y para calcular *du* se halla la diferencial de *u*.

$$v = \int dv = \int senxdx = -cosx, \ \ du = dx$$

A estas alturas del curso, más de un estudiante se preguntará por qué al integrar *v* no se tomó en cuenta la constante de integración *C*.

Como se hizo anteriormente, esa constante será tomada en cuenta como una sola al final del ejercicio.

Usando la fórmula de integración por partes,

$$\int xsenx\,dx = -xcosx - \int -cosxdx$$

Volviendo a integrar

$$\int xsenx\,dx = -xcosx + senx + C$$

Ejercicio 2

$$\int xe^{x}dx$$

(Métodos de integración, (http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo2/metodos.pdf, pág. 13)

$u = x$ $\qquad\qquad$ $dv = e^{x}dx$

$$du = dx \qquad v = \int e^x dx = e^x$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

Ejercicio 3

$$\int x^2 lnx\, dx$$

$$u = lnx \qquad dv = x^2 dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 lnx\, dx = \frac{x^3}{3} lnx - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} lnx - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} lnx - \frac{1}{9}x^3 + C$$

En ocasiones el método de integración por partes hay que aplicarlo varias veces hasta llegar a la respuesta.

Ejercicio 4

$$\int x^2\, e^x dx$$

(Métodos de integración, http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo2/metodos.pdf, p. 14)

$$u = x^2 \qquad dv = e^x dx$$

$$du = 2xdx \qquad v = \int e^x dx = e^x$$

$$\int x^2\, e^x dx = x^2 e^x - \int e^x 2xdx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx$$

La segunda integral es la misma del ejercicio 2, usando entonces este resultado se tiene

$$\int x^2\, e^x dx = x^2 e^x - 2[xe^x - e^x] + C$$

Ejercicio 5

$$\int e^x cosx\, dx$$

$u = e^x$ $\qquad$ $dv = cosxdx$

$du = e^x dx$ $\qquad$ $v = \int cosxdx = senx$

$$\int e^x cosx\, dx = e^x senx - \int e^x senx\, dx$$

Aplicando nuevamente el método de integración por partes

$u = e^x$ $\qquad$ $dv = senxdx$

$du = e^x dx$ $\qquad$ $v = \int senxdx = -cosx$

$$\int e^x cosx\, dx = e^x senx - \left[e^x(\text{-}cosx) - \int e^x(-cosx)\, dx\right]$$

$$\int e^x cosx\, dx = e^x senx + e^x cosx - \int e^x cosx\, dx$$

Ya que el integral del lado derecho de la ecuación es igual que el del lado derecho, se puede pasar al lado izquierdo

$$2\int e^x cosx\, dx = e^x senx + e^x cosx$$

y despejando

$$\int e^x cosx\, dx = \frac{e^x senx + e^x cosx}{2} + C$$

Ejercicios propuestos

1.	$\int lnx\, dx$	$xln\|x\| - x + C$
2.	$\int sen^2x\, dx$	$R{:}\frac{x\text{-}senx\, cosx}{2} + C$

3.	$\int (3x^2 — 2x — 5) sen2x \ dx$ $R: —\frac{1}{2}(3x^3 — 2x — 5)cos2x + \frac{1}{4}(3x^2 — 2)sen2x + \frac{3}{4}xcos2x — \frac{3}{8}sen2x + C$	
4.	$\int \frac{x}{e^x} dx$	$R: — xe^{—x} — e^{—x} + C$
5.	$\int e^{3x} sen2x \ dx$	$R: \frac{1}{13} e^{3x}(3sen2x — 2cos2x) + C$
6.	$\int \frac{lnx}{x} dx$	$R: \frac{1}{2} ln^2 x + C$
7.	$\int arccotgxdx$	$R: xarccotgx — \frac{1}{2} ln\|1 + x^2\| + C$
8.	$\int (x^2 + 3) \ 3x^2 \ dx$	$R: \frac{3}{5} x^5 + 3x^3 + C$
9.	$\int \frac{arcsen\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$	$2\sqrt{x} arcsen\sqrt{x} + 2\sqrt{1 - x} + C$
10.-	$\int xtg^{-1}xdx$	$\frac{x^2}{2} tg^{—1}x — \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} tg^{—1}x + C$

2.3 Integración de funciones trigonométricas

En este punto el estudiante ya puede reconocer cuando integrar usando sustitución o cambio de variable y cuando usar el método de múltiple integración o por partes.

Es conveniente que ahora, el estudiante repase sus conocimientos sobre trigonometría, pues el uso de identidades es constante en esta sección y en adelante.

*"**Caso 1. Integrales de la forma** $\int sen^n dx$, $\int cos^n dx$.*

*Cuando los integrales tienen esta forma, pueden presentarse dos casos: que **n** sea par o que **n** sea impar.*

a. *Si **n** es impar, usar la identidad trigonométrica* $sen^2x + cos^2x = 1$

b. *Si **n** es par, se recomienda usar las identidades trigonométricas siguientes:*

$$sen^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x), \ \ cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)$$

(Villena, pág. 13)

Ejercicio 1

$$\int sen^5x\, dx$$

En este caso el exponente es impar, usar entonces la segunda recomendación

$$\int sen^5dx = \int sen^4x\; senx\; dx = \int (sen^2x)^2 senx\; dx$$

Usando la identidad trigonométrica $sen^2x + cos^2x = 1$

$$= \int (1 - cos^2x)^2 senx\; dx = \int (1 - 2cos^2x + cos^4x)\; senx\; dx$$

$$= \int senx\; dx - \int 2cos^2x\; senx\; dx + \int cos^4x\; senx\; dx$$

Sustituyendo *u=cosx* en los dos últimos integrales, *du=-senxdx*

$$= -\, cosx + 2\int u^2du - \int u^4du = -\, cosx + 2\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C$$

Retornando a la variable original

$$\int sen^5dx = -\, cosx + 2\frac{cos^3x}{3} - \frac{cos^5x}{5} + C$$

Ejercicio 2

$$\int cos^3x\,dx$$

(Jiménez, 2008, p. 118).

$$\int cos^3dx = \int cos^2x\,cosx\,dx = \int (1 - sen^2x)cosx\,dx = \int cosx - \int sen^2x\,cosx\,dx$$

La primera integral es directa. La segunda integral se la resuelve por sustitución o cambio de variable.

$$Sea\; u = senx, \qquad du = cosx\,dx$$

$$= \int cosx\,dx - \int u^2du = senx - \frac{u^3}{3} + C = senx - \frac{sen^3x}{3} + C$$

Ejercicio 3

$$\int sen^4x\,dx$$

$$\int sen^4x\,dx = \int \left(\frac{1 - cos2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1 - 2cos2x\text{-}cos^2 2x}{4} dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int cos2xdx + \frac{1}{4}\int cos^2 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int cos2x + \frac{1}{4}\int \frac{1 + cos4x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int cos2x + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int cos4x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{sen2x}{2}\right) + \frac{1}{8}x + \left(\frac{1}{8}\right)\frac{sen4x}{4} = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{32}sen4x + C$$

"Caso 2. Integrales de la forma $\int sen^m x\,cos^n x\,dx$

a. *Los exponentes **m** o **n** son impares"* (Villena, s.f., p. 14).

Ejercicio 1

$$\int sen^3x cos^{-4}x\ dx$$

$$\int sen^3x cos^{-4}x\ dx = \int sen^2x\ senx\ cos^{-4}x\ dx = \int (1-cos^2x)cos^{-4}x\ senx\ dx$$

$$= \int cos^{-4}x\ senx\ dx — \int cos^{-2}x\ senx\ dx$$

Cambiando de variable

$$u = cosx \quad du = —senxdx$$

$$= —\int u^{-4}\ du + \int u^{-2}\ du = —\frac{u^{-3}}{—3} + \frac{u^{-1}}{—1} + C$$

$$= \frac{cos^{-3}x}{3} \text{-} \frac{cos^{-1}x}{1} + C$$

$$= 3sec^3x\text{-}secx + C$$

El estudiante se habrá dado cuenta que la idea de partir sen^3x en sen^2x *y senx* fue formar la pareja *cosx* y *senx* para poder aplicar cambio de variable.

Ejercicio 2

$$\int sen^3\left(\frac{x}{2}\right)cos^5\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

Reordenando para que el estudiante vea con mayor claridad el proceso se tiene

$$\int cos^5\left(\frac{x}{2}\right)sen^3\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int cos^4\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)sen^3\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \int \left(cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 cos\left(\frac{x}{2}\right)sen^3\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \int \left(1-sen^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 cos\left(\frac{x}{2}\right)sen^3\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \int \left(1 - 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right) + sen^4\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 cos\left(\frac{x}{2}\right) sen^3\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \int \left[sen^3\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2sen^5\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right) + sen^7\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx$$

$$= \int \left[sen^3\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx - \int \left[2sen^5\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx + \int \left[sen^7\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx$$

$Sea\ u = sen\frac{x}{2} \quad du = \frac{1}{2}cos\frac{x}{2}dx$

Multiplicando y dividiendo al mismo tiempo por 2 a cada integral con la intención de obtener el valor completo de *du* en la integral

$$= 2\int u^3\,du\text{-}(2)(2)\int u^5\,du + 2\int u^7\,du = 2\frac{u^4}{4} - 4\frac{u^6}{6} + 2\frac{u^8}{8} + C$$

$$= \frac{1}{2}sen^4\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{3}sen^6\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}sen^8\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

b. *Los exponentes* **m** *y* **n** *son pares*

Ejercicio 1

$$\int sen^2x cos^4x\,dx$$

Ya que ambos exponentes son pares, el procedimiento recomendado es el siguiente:

$$\int sen^2x cos^4x\,dx = \int sen^2x(cos^2x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - cos2x}{2}\right)\left(\frac{1 + cos2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - cos2x)\,(1 + 2cos2x + cos^2 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x - \cos 2x - 2\cos^2 2x - \cos^3 2x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\left[\int dx+\int \cos 2x\,dx-\int \cos^2 2x\,dx-\int \cos^3 2x\,dx\right]$$

Resolviendo cada una de las integrales por separado:

$$\int dx = x + C$$

$$\int cos2xdx = \frac{1}{2}sen2x + C$$

$$\int cos^2 2x = \frac{1}{2}\int (1 + cos4x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}sen4x + C$$

$$\int \cos^3 2x\,dx = \frac{1}{2}sen2x - \frac{sen^3 2x}{6} + C$$

Esta integral ya fue resuelta en el ejercicio 2 del Caso 1 con la diferencia que ahora se trata de ángulo doble. Se deja al estudiante para que resuelva esta parte del ejercicio.

La respuesta final es

$$\int sen^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{8}\left[x+\frac{1}{2}sen2x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}sen4x\right)-\left(\frac{1}{2}sen2x-\frac{sen^3 2x}{6}\right)\right]+C$$
$$=\frac{1}{8}\left[x+\frac{1}{2}sen2x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}sen4x-\frac{1}{2}sen2x+\frac{1}{6}sen^3 2x\right]+C$$
$$=\frac{1}{8}\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{8}sen4x+\frac{1}{6}sen^3 2x\right]+C$$

"Caso 3. Integrales de la forma ∫sen(mx)cos(nx) dx, ∫sen(mx) sen(nx) dx, ∫cos(mx)cos(nx) dx" (Villena, s.f., p. 14).

Para estos casos se recomienda usar las identidades de ángulo múltiple y de ángulo negativo que se muestran a continuación:

$$sen(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}\left[sen(m+n)x+sen(m-n)x\right](1)$$
$$sen(mx)sen(nx)=\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right](2)$$

$$\cos(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right](3)$$

$$sen(-x) = -senx \ \ (4)$$

$$\cos(-x)=\cos x\,(5)$$

Ejercicio 1

$$\int sen2xcos4x\,dx$$

Aplicando la identidad (1) en donde *m=2* y *n=4*

$$\int sen2xcos4x\,dx = \int \frac{1}{2}[sen(2+4)x + sen(2-4)x]\,dx = \frac{1}{2}\int sen6x + sen(-2x)\,dx$$

Aplicando la identidad (4)

$$= \frac{1}{2}\int (sen6x\text{-}sen2x)dx = \frac{1}{2}\left[\left(\text{-}\frac{cos6x}{6}\right) + \frac{cos2x}{2}\right) + C$$

$$= \text{-}\frac{1}{12}cos6x + \frac{1}{4}cos2x + C$$

Ejercicio 2

$$\int cos3xcosxdx$$

Aplicando la identidad (3) haciendo *m=3 y n=1*

$$= \frac{1}{2}\int (sen6x\text{-}sen2x)dx = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{cos6x}{6}\right) + \frac{cos2x}{2}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{12}cos6x + \frac{1}{4}cos2x + C$$

"Caso 4. Integrales de la forma ∫tgnx dx, ∫cotgnx dx" (Villena, s.f., p. 17).

Igual que en los casos anteriores, para llevar estas integrales a una forma donde pueda aplicarse el método de sustitución o cambio de variable, se recomienda usar las siguientes identidades:

$$tg^2x = sec^2x - 1 \ \ (1)$$

$$cotg^2x = csc^2x - 1 \ \ (2)$$

Ejercicio 1

$$\int tg^2xdx$$

Usando la identidad (1)

$$\int tg^2xdx = \int (sec^2x - 1)dx = tgx - x + C$$

Ejercicio 2

$$\int cotg^3xdx = \int cotgxcotg^2x\,dx$$

$$= \int cotgx(csc^2x - 1)dx = \int cotgxcsc^2x\,dx - \int cotgx\,dx$$

$$sea\, u = cotgx, \ \ du = -csc^2xdx$$

$$= -\int udu - ln|senx| + C = -\frac{u^2}{2} - ln|senx| + C = -\frac{cotg^2x}{2} - ln|senx| + C$$

"Caso 5. Integrales de la forma ∫tgmx secnx dx, ∫cotgmx cscnx dx"

a. Si el exponente n es par" (Villena, s.f. p. 18).

Ejercicio 1

$$\int tg^3 3x\, sec^4 3x\, dx$$

(Jiménez, 2008, p. 121).

Ya que la derivada de la *tgx* es *sec*^{2}*x*, se tratará de formar la pareja para aplicar el método de sustitución de variables.

$$\int tg^3 3x\, sec^4 3x\, dx = \int tg^3 3x\,(1 + tg^2 3x) sec^2 3x\, dx$$

$$= \int tg^3 3x\, sec^2 3x\, dx + \int tg^5 3x\, sec^2 3x\, dx$$

$$sea\ u = tg3x, du = 3sec^2 3x\, dx$$

Multiplicando y dividiendo para 3 ambas integrales para tener el diferencial completo

$$= \int \frac{1}{3} tg^3 3x\, (3) sec^2 3x\, dx + \int \frac{1}{3} tg^5 3x\, (3) sec^2 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int u^3\, du + \frac{1}{3}\int u^5\, du = \frac{1}{3}\frac{u^4}{4} + \frac{1}{3}\frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{tg^4 3x}{12} + \frac{tg^6 3x}{18} + C$$

a. Si el exponente m es impar

Ejercicio 1

$$\int cotg^3 x\, csc^3 x\, dx = \int cotg^2 x\, csc^2 x\, cotgx\, cscx\, dx$$

Usando la identidad

$$ctg^2 x = csc^2 x - 1$$

$$\int cotg^3 x\, csc^3 x\, dx = \int (csc^2 x - 1)\, csc^2 x\, ctgx\, cscx\, dx$$

$$= \int csc^4 x\, cotgx\, cscx\, dx - \int csc^2 x\, ctgx\, cscx\, dx$$

$$sea\ u = cscx, \quad du = -cscx\, cotgx\, dx$$

$$= -\int u^4 du + \int u^2 du = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C = -\frac{csc^5 x}{5} + \frac{csc^3 x}{3} + C$$

Los casos aquí expuestos cubren una gran cantidad de integrales de combinaciones de funciones trigonométricas, sin embargo puede haber otros casos en donde probablemente se puedan integrar aplicando alguno de los métodos ya vistos.

Ejercicios propuestos

1.	$\int sen^2 4x\ dx$	$R: \frac{1}{2}x — \frac{1}{16}sen8x + C$
2.	$\int cos^5 x\ dx$	$R: senx— \frac{2}{3}sen^3 x + \frac{1}{5}sen^5 x + C$
3.	$\int sen^3 3x\ dx$	$R: —\frac{1}{3}cos3x + \frac{1}{9}cos^3 3x + C$
4.	$\int cos^4 x\ dx$	$R: \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{32}sen4x + C$
5.	$\int sen^5 x\ cos^2 x\ dx$	$R: —\frac{1}{3}cos^3 x + \frac{2}{5}cos^5 x — \frac{1}{7}cos^7 x + C$
6.	$\int sen^2 x cos^2 x\ dx$	$R: \frac{1}{8}x — \frac{1}{32}sen4x + C$
7.	$\int sen^4 3x\ cos^2 3x\ dx$	$R: \frac{1}{16}x — \frac{1}{192}sen12x — \frac{1}{144}sen^3 6x + C$
8.	$\int cos3x\ cos2x\ dx$	$R: \frac{1}{10}sen5x + \frac{1}{2}senx + C$
9.	$\int sen3x\ cos5x\ dx$	$R: \frac{1}{4}cos2x — \frac{1}{16}cos8x + C$
10.	$\int tg^4 x\ dx$	$R: \frac{1}{3}tg^3 x\text{-}tgx + x + C$
11.	$\int cotg^4 x\ dx$	$R: —\frac{1}{3}cotg^3 x + cotgx + x + C$
12.	$\int tg^4 x\ sec^4 x\ dx$	$R: \frac{tg^7 x}{7} + \frac{tg^5}{5} + C$
13.	$\int cotg^3 x\ csc^4 x\ dx$	$R — \frac{1}{4}cotg^4 x — \frac{1}{6}cotg^6 x + C$
14.	$\int \sqrt{tgx}\ sec^4 x\ dx$	$R: \frac{2}{3}tg^{\frac{3}{2}}x + \frac{2}{7}tg^{\frac{7}{2}}x + C$

2.4 Integración por sustitución trigonométrica

Las funciones que tienen radicales generalmente son complicadas de integrar, así es que conviene librarse de ellos. Una forma de lograrlo es haciendo las sustituciones que se recomiendan a continuación:

Tabla 2
Sustituciones trigonométricas recomendadas

Radical de la forma	**Sustitución recomendada**
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\ sen\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\ tg\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\ sec\theta$

Ejercicio 1

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

De acuerdo a la sustitución recomendada en la tabla 1, la sustitución que aplica en este caso es:

$$x = a\ sen\theta$$

$$siendo\ a^2 = 4, a = 2, x = 2sen\theta, dx = 2cos\theta\ d\theta$$

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int \sqrt{4 - 4sen^2\theta}\,(2cos\theta\ d\theta) = \int 2cos\theta\sqrt{4(1 - sen^2\theta)}\, d\theta$$
$$= 2\int cos\theta\sqrt{4cos^2\theta}\, d\theta = 4\int cos\theta\ cos\theta\ d\theta = 4\int cos^2\theta\ d\theta$$

Este es un caso de integral trigonométrica en donde se usa la identidad trigonométrica

$$cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + cos2\theta)$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 4\int \frac{1}{2}(1+cos2\theta)\,d\theta = 2\int d\theta + 2\int cos2\theta\,d\theta = 2\theta + \frac{2sen2\theta}{2} + C$$
$$= 2\theta + sen2\theta + C$$

Es conveniente por una razón que se la explicará más adelante, que la respuesta quede en función de ángulo simple y no de ángulos múltiples como en este caso. Esto se lo puede hacer con la ayuda de la siguiente identidad trigonométrica:

$$sen2\theta = 2sen\theta cos\theta$$

La respuesta quedaría entonces:

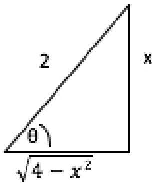
$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\theta + 2sen\theta cos\theta + C$$

Para regresar a la variable original *x* se usa la sustitución original que se hizo

$$x = 2\ sen\theta\ y\ se\ despeja\ sen\theta$$

$$sen\theta = \frac{x}{2}$$

Por definición de la función trigonométrica *seno*, *x* es el lado opuesto y 2 la hipotenusa. Con este dato se construye un triángulo rectángulo, de donde se sacan los datos que se necesitan para reemplazar por la variable original *x*.



$$\theta = arc\ sen\frac{x}{2};\ sen\theta = \frac{x}{2}; cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

Reemplazando en la respuesta se tiene

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2arc\ sen\frac{x}{2} + 2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right) = 2arc\ sen\frac{x}{2} + \left(\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}\right)$$

Ejercicio 2

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx$$

$$sustitución\ recomendada: x = asen\theta \quad siendo\ a = 5, x = 5sen\theta, dx = 5cos\theta d\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{5^2\text{-}5^2sen^2\theta}}{5sen\theta}(5cos\theta d\theta) = 5\int \frac{\sqrt{5^2(1-sen^2\theta)}}{5sen\theta}cos\theta d\theta$$

$$= \int \frac{5\sqrt{cos^2\theta}}{sen\theta}cos\theta d\theta = 5\int \frac{cos\theta\ cos\theta}{sen\theta}d\theta = 5\int \frac{cos^2\theta}{sen\theta}d\theta$$

$$= 5\int \frac{1 - sen^2\theta}{sen\theta}d\theta = 5\left[\int \frac{1}{sen\theta}d\theta - \int \frac{sen^2\theta}{sen\theta}d\theta\right]$$

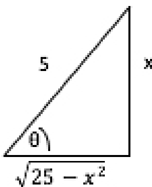
$$= 5\left[\int csc\theta d\theta - \int sen\theta d\theta\right] = 5[ln|csc\theta - cotg\theta| + cos\theta] + C$$

Para volver a la variable original, se procede tal como se explicó en el ejercicio anterior

$$x = 5sen\theta \quad \rightarrow \quad sen\theta = \frac{x}{5}$$

Con este dato se construye el triángulo rectángulo

Los datos que se sacan del triángulo para reemplazar en la respuesta son:



$$csc\theta = \frac{5}{x}, cotg\theta = \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}, cos\theta = \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$$

Reemplazando se tiene:

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx = 5\left[ln\left|\frac{5}{x} — \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}\right] + C$$

Ejercicio 3

$$\int \sqrt{2+x^2}\,dx$$

$$a = \sqrt{2}, x = \sqrt{2}tgz, dx = \sqrt{2}sec^2z\,dz$$

$$\int \sqrt{2+x^2}dx = \int \sqrt{2+2tg^2z}\,\sqrt{2}sec^2z\,dz = \int \sqrt{2}sec^2z\sqrt{2(1+tg^2z)}\,dz$$

$$= \int \sqrt{2}sec^2z\sqrt{2}\sqrt{(1+tg^2z)}\,dz = 2\int sec^2z\sqrt{sec^2z}\;dz = 2\int sec^3z\,dz$$

Este caso no está contemplado en ninguno de los casos de integrales trigonométricas antes expuesto. La solución se la realizará por el método de integración por partes (Villena, s.f.).

$u = secz$ $\qquad$ $dv = sec^2zdz$

$du = secz\,tgz\,dz$ $\qquad$ $v = tgz$

$$\int sec^3z\,dz = secz\,tgz — \int tgz\,secz\,tgz\,dz = secz\,tgz — \int tg^2z\,secz\;\;dz$$

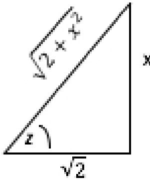
$$= secz\,tgz — \int (sec^2z — 1)secz\;\;dz = secz\,tgz — \int sec^3z\,dz + \int secz\,dz$$

$$2\int sec^3z\,dz = secz\,tgz + ln|secz + tgz| + C$$

El estudiante debe notar que en la expresión anterior, ya está incluido el 2 de la respuesta anterior de tal manera que

$$\int \sqrt{2+x^2}dx = secz\,tgz + ln|secz + tgz| + C$$

Regresando a la variable original,



$$x = \sqrt{2}tgz \quad tgz = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\int \sqrt{2+x^2}dx = \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{2}} + ln\left|\frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}}\right| + C$$

$$\int \sqrt{2+x^2}dx = \frac{x\sqrt{2+x^2}}{2} ln\left|\frac{x+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2}}\right| + C$$

Ejercicio 4

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$$

$$a = 3, x = \frac{3}{2}tg\emptyset, dx = \frac{3}{2}sec^2\emptyset\ d\emptyset$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} = \int \frac{\frac{3}{2}sec^2\emptyset\ d\emptyset}{\frac{3}{2}tg\emptyset\sqrt{9+4\left(\frac{3}{2}tg\emptyset\right)^2}} = \int \frac{\frac{3}{2}sec^2\emptyset\ d\emptyset}{\frac{3}{2}tg\emptyset\sqrt{9+9tg^2\emptyset}} = \int \frac{\frac{3}{2}sec^2\emptyset\ d\emptyset}{\frac{3}{2}tg\emptyset\sqrt{9(1+tg^2\emptyset)}} =$$

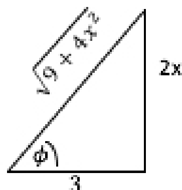
$$= \int \frac{\frac{3}{2}sec^2\emptyset\ d\emptyset}{\frac{3}{2}tg\emptyset\sqrt{9sec^2\emptyset}} = \int \frac{\frac{3}{2}sec^2\emptyset\ d\emptyset}{\frac{3}{2}tg\emptyset(3)sec\emptyset} = \int \frac{sec\emptyset\ d\emptyset}{3tg\emptyset} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{cos\emptyset}\frac{cos\emptyset}{sen\emptyset}d\emptyset$$

$$= \frac{1}{3}\int csc\emptyset\ d\emptyset = \frac{1}{3}ln|csc\emptyset - cot\emptyset| + C$$

Para regresar a la variable *x* se construye el triángulo rectángulo a partir de la sustitución original hecha:

$$x = \frac{3}{2}tg\emptyset \quad \rightarrow \quad tg\emptyset = \frac{2x}{3}$$

Extrayendo del triángulo los datos necesarios para reemplazar en la respuesta se tiene:



$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} = \frac{1}{3} ln \left| \frac{\sqrt{9+4x^2}}{2x} - \frac{3}{2x} \right| + C$$

Ejercicio 5

$$\int \sqrt{x^2-4}\, dx$$

$$a = 2, x = 2sect, dx = 2sect\ tgt\ dt$$

$$\int \sqrt{x^2-4}\, dx = \int \left(\sqrt{4sec^2t-4}\right)(2sect\ tgt\ dt) = 2\int sect\ tgt\ \sqrt{4(sec^2t-1)}\, dt =$$

$$= 4\int sect\ tgt\ tgt\ dt = 4\int sect\ tg^2t\ dt = 4\int sect\,(sec^2t - 1)dt$$

$$= 4\left[\int sec^3t\, dt - \int sect\ dt\right]$$

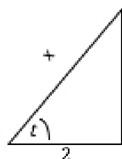
$$= 4\left[\frac{1}{2} sect\ tgt + \frac{1}{2} ln|sect + tgt| - ln|sect + tgt|\right] + C$$

El primer integral, *sec³t* se desarrolló en el ejercicio 3.

$$= 2sect\ tgt\text{-}2ln|sect + tgt| + C$$

El triángulo queda de la siguiente manera:

Sustituyendo los valores de las funciones trigonométricas



$$\int \sqrt{x^2-4}\, dx = 2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right) - 2ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + C$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2-4}}{2} - 2ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + C$$

Ejercicios propuestos

1.	$\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x}dx$	$R: 5ln\|csc\emptyset - cotg\emptyset\| + 5cos\emptyset + C$
2.	$\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$	$R: \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{4} arc\ senx + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$
3.	$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$	$R: -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C$
4.	$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$	$R: \sqrt{x^2-4}\text{-}2arcsec\frac{x}{2} + C$
5.	$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4-9x^2}}$	$R: \frac{8\sqrt{4-9x^2}}{162}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{4-9x^2}}{2}\right)^2 - 1\right] + C$
6.	$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$	$R: \frac{1}{3} ln \left\|\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2x}\right\| + C$
7.	$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{16+x^2}\right)^4}$	$R: \frac{1}{128}\left(arctg\frac{x}{4} + \frac{4x}{16+x^2}\right) + C$
8.	$\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx$	$R: \frac{3}{2} arc\ sen(x-1)\text{-}\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2} - 2\sqrt{1-(x-1)^2} + C$
9.	$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$	$R: ln\left\|\sqrt{e^{2x}+1} + e^x\right\| + C$
10.	$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$	$R: \frac{1}{2}\left(arctgx + \frac{x}{1+x^2}\right) + C$
11.	$\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{3/2}}$	$R: \frac{1}{4}\frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}} + C$
12.	$\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{3/2}}$	$R: \text{-}\frac{1}{9}\frac{x-3}{\sqrt{4x^2\text{-}24x+27}} + C$
13.	$\int \frac{dx}{x^2-1}$	$R: ln\left\|\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\right\| + C$

14.	$\int \frac{lnx\,dx}{x\sqrt{1-4lnx-ln^2x}}$	$R: -\sqrt{3+lnx}-2arc\,sen\left(\frac{2+lnx}{\sqrt{5}}\right)+C$
15.	$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$	$R: \frac{4\left(x-\frac{3}{2}\right)-2}{\sqrt{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-1}}+C$

2.5 Integración de funciones racionales por medio de fracciones parciales

Una función racional está formada por el cociente de dos funciones polinómicas con exponentes enteros (no negativos ni fraccionarios), es decir tienen la forma siguiente:

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

Es decir,

$$F(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0}$$

El grado de un polinomio está dado por el exponente de mayor valor de la variable.

Una fracción racional puede ser propia o impropia. Una fracción es impropia si el grado del polinomio del numerador es mayor o igual que el grado del polinomio del denominador, caso contrario, la fracción es propia.

El método que más adelante se explicará funciona con fracciones racionales propias, de tal manera que si se tiene una fracción racional impropia, es necesario hacer la división del polinomio para poder trabajar con la fracción propia.

Por ejemplo, la siguiente fracción impropia se convierte en la siguiente fracción propia al hacer la división correspondiente.

$$\frac{x^5+4x^3-2x^2+x+5}{x^3-2x+2}=x^2+6-\frac{4x^2-13x+7}{x^3-2x+2}$$

(Se recomienda al estudiante que repase este material antes de continuar con el tema).

Los dos primeros términos x^2 y *6* son fáciles de integrar y el problema se reduce a integrar la fracción restante.

Antes de aplicar el método, es necesario descomponer el denominador en factores simples de tal manera de aplicar alguno de los siguientes casos:

"**Caso 1. Factores lineales distintos.** A cada factor lineal $ax+b$, del denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma

$$\frac{A}{ax+b}$$

siendo A una constante a determinar". (Ayres, 1989, p. 150)

Caso 2. Factores lineales iguales. A cada factor lineal $ax+b$ que figure n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

siendo *A1, A2,…..,An* constantes a determinar (Ayres, 1989, p. 150).

Caso 3. Factores cuadráticos distintos. A cada factor cuadrático reducible ax^2+bx+c que figure en el denominador de una fracción propia, le corresponde una fracción de la forma

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

siendo A y B constantes a determinar (Ayres, 1989, p. 150).

Caso 4. Factores cuadráticos iguales. A cada factor cuadrático irreducible, ax^2+bx+c, que se repita n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

siendo A y B constantes a determinar. (Ayres, 1989, p. 150).

Ejercicio 1

$$\int\frac{5x+3}{x^2—9}dx$$

(Jiménez, 2008, p. 124).

El integrando es una función racional propia, ya que el máximo exponente en el numerador es 1 mientras que el máximo exponente del denominador es 2.

El denominador de esta fracción se lo puede descomponer en la siguiente manera:

$$\frac{5x+3}{x^2-9}=\frac{5x+3}{(x+3)(x-3)}$$

Esta fracción tiene en el denominador dos factores lineales *(x+3)* y *(x-3)* diferentes, entonces se aplica el caso 1

$$\frac{5x+3}{x^2-9}=\frac{5x+3}{(x+3)(x-3)}=\frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x-3)}=\frac{Ax\text{-}3A+Bx+3B}{(x+3)(x-3)}=\frac{(A+B)x+3B\text{-}3A}{(x+3)(x-3)}$$

Es decir

$$\frac{5x+3}{(x+3)(x-3)}=\frac{(A+B)x+3B\text{-}3A}{(x+3)(x-3)}$$

Para que estas dos fracciones sean iguales debe ocurrir que

$$A + B = 5$$

$$3B\text{-}3A = 0$$

Multiplicando la primera ecuación por 3 y sumado con la segunda ecuación

$$3A + 3B = 15$$
$$3B\text{-}3A = 3$$
$$6B = 18$$
$$B = 3\ y\ A = 2$$

El integral original se convierte entonces en

$$\int \frac{5x+3}{x^2 - 9}dx = \int \frac{2}{(x+3)}dx + \int \frac{3}{(x-3)}dx$$

Estas dos integrales pueden ser fácilmente resueltas usando sustitución de variables haciendo:

$u = x + 3 \quad y \quad du = dx \quad para\ la\ primera\ integral\ y\ v = x\text{-}3\ y\ dv = dx\ para\ la\ segunda$

$$\int \frac{5x+3}{x^2-9}dx = \int \frac{2}{u}du + \int \frac{3}{v}dv = 2ln|u| + 3ln|v| + C = 2ln|x+3| + 3ln|x-3| + C$$

Ejercicio 2

$$\int \frac{5x+3}{x^3 - 2x^2 - 3x}dx$$

Esta es una fracción racional propia que se la puede factorizar de la siguiente forma:

$$\frac{5x+3}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{5x+3}{x(x^2 - 2x - 3)} = \frac{5x+3}{x(x-3)(x+1)}$$

Como se tienen 3 factores lineales diferentes, se aplica el caso 1.

$$\frac{5x+3}{x^3 — 2x^2 — 3x} = \frac{5x+3}{x(x — 3)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x — 3)} + \frac{C}{(x+1)}$$
$$= \frac{A(x — 3)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x — 3)}{x(x — 3)(x+1)}$$

Ya que los denominadores evidentemente son iguales, nos vamos a centrar en los numeradores

$$5x + 3 = A(x - 3)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 3) \quad (1)$$

$$5x + 3 = Ax^2 + Ax\text{-}3Ax\text{-}3A + Bx^2 + Bx + Cx^2 — 3Cx$$

Agrupando los términos con x^2, los que tiene x y los independientes se tiene:

$$5x + 3 = (A + B + C)x^2 + (— 2A + B\text{-}3C)x — 3A$$

Comparando los términos se forman las siguientes ecuaciones:

$$A + B + C = 0$$

$$— 2A + B\text{-}3C = 5$$

$$— 3A = 3$$

Resolviendo este sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas se tiene:

$$A = — 1; B = \frac{3}{2}; C = — \frac{1}{2}$$

El integral se convierte en:

$$\int \frac{5x+3}{x^3 — 2x^2 — 3x} dx = \int \frac{— 1}{x} dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{(x — 3)} dx + \int \frac{— \frac{1}{2}}{(x+1)} dx$$

Aplicando sustitución de variables como en el Ejercicio 1 se tiene el siguiente resultado

$$\int \frac{5x+3}{x^3 — 2x^2 — 3x} dx = — ln|x| + \frac{3}{2} ln|x — 3| — \frac{1}{2} ln|x+1| + C$$

Una manera más rápida de encontrar los valores de A, B y C es la siguiente:

La ecuación $5x+3=(A+B+C)x^2+(B-2^a-3C)x-3^a$ debe cumplir la igualdad para cualquier valor de x. Para determinar las tres constantes A, B y C, se necesitarían tres valores de *x* para formar tres ecuaciones. Estos valores pueden ser cualesquiera, sin embargo tres valores con los que se hace fácil trabajar son aquellos que hacen cero los paréntesis en la ecuación (1), es decir, antes de destruir los paréntesis.

Repitiendo la ecuación (1)

$$5x + 3 = A(x - 3)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 3) \quad (1)$$

$$x = 3; x = -1; x = 0$$

Con $x=0$ se tiene:

$$5(0) + 3 = A(-3)(1) + B(0)(0 + 1) + C(0)(0 - 3) \quad \rightarrow \quad 3 = -3A \quad \rightarrow \quad A = -1$$

Con $x=-1$ y A=-1se tiene:

$$5(-1) + 3 = (-1)(-1 - 3)(-1 + 1) + B(-1)(-1 + 1) + C(-1)(-1 - 3)$$

$$-2 = 0 - B(0) + 4C \quad \rightarrow \quad C = -\frac{1}{2}$$

Con x=-3, A=-1, C=-1/2 se tiene:

$$5(-3) + 3 = (-1)(-3 - 3)(-3 + 1) + B(-3)(-3 + 1) + (-\frac{1}{2})(-3)(-3 - 3)$$

$$-12 = -12 + 6B - 9 \quad \rightarrow \quad B = \frac{3}{2}$$

Y se llega a los mismos resultados de una forma más rápida.

Ejercicio 3

$$\int \frac{x}{(x-3)^2} dx$$

Como $(x\text{-}3)^2 = (x\text{-}3)(x\text{-}3)$ se trata entonces del segundo caso ya que son dos factores iguales

$$\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)+B}{(x-3)^2} = \frac{Ax-3A+B}{(x-3)^2}$$

$$A = 1;\ -3A + B = 0 \quad \rightarrow \quad B = 3$$

$$\int \frac{x}{(x-3)^2}dx = \int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{3dx}{(x-3)^2} = ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + C$$

Ejercicio 4

$$\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2}dx$$

Como se puede apreciar, se tiene una mezcla del primero y segundo caso, por tanto

$$\frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Trabajando sobre el numerador, ya que evidentemente los denominadores son iguales se tiene:

$$3x^2 - 8x + 13 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x+3)$$

Seleccionando, como se hizo en la segunda parte del ejercicio 2, los números $x=1;\ x=-3;\ x=0$ en donde $x=0$ se lo escoge por comodidad, se tiene:

Con $x=1$

$$3(1)^2 - 8(1) + 13 = A(1-1)^2 + B(1-1)(1+3) + C(1+3) \quad \rightarrow \quad C = 2$$

Con $x=-3$

$$3(-3)^2 - 8(-3) + 13 = A(-3-1)^2 + B(-3-1)(-3+3) + C(-3+3) \quad \rightarrow \quad A = 4$$

Con $x=0$

$$3(0)^2-8(0)+13=A(0-1)^2+B(0-1)(0+3)+C(0+3) \quad \rightarrow \quad B=-1$$

$$\int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2}dx=4\int \frac{dx}{x+3}-\int \frac{dx}{x-1}+2\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$
$$=4ln|x+3|-ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C$$

Ejercicio 5

$$\int \frac{4dx}{x^3+4x}$$

$$\frac{4}{x^3+4x}=\frac{4}{x(x^2+4)}$$

En este se tiene una combinación del primer caso y el tercero, ya que entre paréntesis se tiene un factor cuadrático. La expresión anterior queda entonces como sigue:

$$\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Analizando solo denominadores

$$4=A(x^2+4)+x(Bx+C)=Ax^2+4A+Bx^2+Cx=(A+B)x^2+Cx+4A$$

Comparando términos salen las tres ecuaciones que se necesitan

$$A+B=0$$

$$C=0$$

$$4A=4$$

Los valores de los coeficientes son:

$$A=1, B=-1, C=0$$

$$\int \frac{4dx}{x^3+4x}=\int \frac{dx}{x}-\int \frac{xdx}{x^2+4}$$

La primera de las integrales es directa, mientras que la segunda se resuelve haciendo $u=x^2+4$, $du=2xdx$.

$$\int \frac{4dx}{x^3+4x} = lnx - \frac{1}{2} ln(x^2+4) + C$$

Ejercicio 6

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx$$

Esta es una combinación del caso 1 y el caso 4

$$\frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$
$$= \frac{A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x+3)(x^2+2) + (Dx+E)(x+3)}{(x+3)(x^2+2)^2}$$

Comparando numeradores

$$\begin{aligned} 6x^2\text{-}15x + 22 &= A(x^4+4x^2+4) + (Bx^2+3Bx+Cx+3C)(x^2+2) + Dx^2 + 3Dx + Ex \\ &+ 3E \\ &= Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^4 + 2Bx^2 + 3Bx^3 + 6Bx + Cx^3 + 2Cx + 3Cx^2 \\ &+ 6C + Dx^2 + 3Dx + Ex + 3E \\ &= (A+B)x^4 + (3B+C)x^3 + (4A+2B+3C+D)x^2 \\ &+ (6B+2C+3D+E)x + 4A + 6C + 3E \end{aligned}$$

Igualando términos salen las 5 ecuaciones que se necesitan para encontrar las 5 incógnitas

$$\begin{gathered} A+B=0 \\ 3B+C=0 \\ 4A+2B+3C+D=6 \\ 6B+2C+3D+E=-15 \\ 4A+6C+3E=-22 \end{gathered}$$

En este punto lo mejor para encontrar las 5 variables es usar calculadoras de sistemas de ecuaciones o cualquiera de los métodos enseñados en Álgebra Lineal. En este caso, a manera de recordatorio se usará el método de Cramer.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 121; D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -15 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 22 & 0 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 121; D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 22 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -121$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -15 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 22 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 363; D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -15 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 22 & 3 \end{vmatrix} = -605; D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 2 & 3 & -15 \\ 4 & 0 & 6 & 0 & 22 \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \frac{121}{121} = 1; B = \frac{-121}{121} = -1; C = \frac{363}{121} = 3; D = \frac{-605}{121} = -5; E = \frac{0}{121} = 0$$

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx = \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{-x+3}{x^2+2} dx - \int \frac{5x}{(x^2+2)^2} dx$$

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx = \int \frac{dx}{x+3} - \int \frac{xdx}{x^2+2} + 3\int \frac{dx}{x^2+2} - \int \frac{5x}{(x^2+2)^2} dx$$

Sustituciones recomendadas para la solución de las cuatro integrales:

Primera: u=x+3; du=dx
Segunda: u=x^2+2; du=2xdx
Tercera: integración directa
Cuarta: u=x^2+2; du=2xdx

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx = ln|x+3| - \frac{1}{2} ln|x^2+2| + \frac{3}{\sqrt{2}} tg^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{5}{2(x^2+2)} + C$$

Ejercicios propuestos

1.	$\int \frac{dx}{x^2-4}$	$R: \frac{1}{4}\left[ln\left\|\frac{x-2}{x+2}\right\| + C\right]$
2.	$\int \frac{x+3}{x^2\text{-}3x+2} dx$	$R: 5ln\|x-2\| - 4ln\|x-1\| + C$
3.	$\int \frac{5xdx}{2x^3 + +6x^2}$	$R: \frac{5}{6} ln\left\|\frac{x}{2x+6}\right\| + C$

4.	$\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$	$R: \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + 2ln\left\|\frac{x}{x-1}\right\| + C$
5.	$\int \frac{dx}{x^2 + 7x + 6}$	$R: \frac{1}{5} ln\left\|\frac{x+1}{x+6}\right\| + C$
6.	$\int \frac{x+3}{x^2 - 4x + 4} dx$	$R: ln\|x-2\| - \frac{5}{x-2} + C$
7.	$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 2x^2 + 1}$	$R: x - \frac{3}{2} arctgx + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$
8.	$\int \frac{2x+1}{(x-1)^2} dx$	$R: 2ln\|x-1\| - \frac{3}{x-1} + C$
9.	$\int \frac{5x^2 - 42x + 35}{(6x+5)(x-3)^2} dx$	$R: \frac{5}{6} ln\|6x+5\| + \frac{2}{x-3} + C$
10.	$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
11.	$\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} dx$	$R: \frac{1}{2} ln\|4x+1\| + \frac{1}{2} ln\|x^2+1\| - arctgx + C$
12.	$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx$	$R: ln\|x+3\| - \frac{1}{2} ln\|x^2+2\| + \frac{3}{\sqrt{2}} arctg\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2(x^2+2)} + C$
13.	$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 2x^2 + 1}$	$R: x - \frac{3}{2} arctgx + \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} + C$
14.	$\int \frac{x^3 + 7x^2 - 5x + 5}{(x-1)^2(x+1)^3} dx$	$R: -\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x+1)^2} + C$
15.	$\int \frac{7x+1}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} dx$	$R: -\frac{7}{x+2} + \frac{15}{2(x+2)^2} + C$

2.6 Integración de expresiones cuadráticas

Las integrales de este tipo se resuelven manipulando la expresión cuadrática hasta convertirla en trinomio cuadrado perfecto.

Existe 4 casos que se van a estudiar de integrales que contienen expresiones cuadráticas no necesariamente perfectas:

Caso 1. Integrales de la forma

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

Ejercicio 1

$$\int \frac{dx}{x^2\text{-}7x + 10} = \int \frac{dx}{x^2\text{-}7x + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} + 10} = \int \frac{dx}{\left(x\text{-}\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} \quad sea\ u = x\text{-}\frac{7}{2};\ \ du = dx$$

$$\int \frac{du}{u^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}\ esta\ integral\ se\ la\ puede\ resolver\ usando\ fracciones\ parciales$$

$$\frac{1}{\left(u + \frac{3}{2}\right)\left(u - \frac{3}{2}\right)} = \frac{A}{\left(u + \frac{3}{2}\right)} + \frac{B}{\left(u - \frac{3}{2}\right)} = \frac{A\left(u - \frac{3}{2}\right) + B\left(u + \frac{3}{2}\right)}{\left(u + \frac{3}{2}\right)\left(u - \frac{3}{2}\right)}$$

Igualando los numeradores

$$1 = A\left(u - \frac{3}{2}\right) + B\left(u + \frac{3}{2}\right) = Au - \frac{3}{2}A + Bu + \frac{3}{2}B = (A + B)u + \frac{3}{2}B - \frac{3}{2}A$$

$$A + B = 0;\quad \frac{3}{2}B - \frac{3}{2A} = 1 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{3};\ \ B = \frac{1}{3}$$

$$\int \frac{du}{u^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \int \frac{-\frac{1}{3}du}{u + \frac{3}{2}} + \int \frac{\frac{1}{3}du}{u - \frac{3}{2}}$$

Haciendo los siguientes cambios de variables:

$$v = u + \frac{3}{2}\quad dv = du; dw = u - \frac{3}{2}\quad dw = du$$

$$\int \frac{du}{u^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = -\frac{1}{3}\int \frac{dv}{v} + \frac{1}{3}\int \frac{dw}{w} = -\frac{1}{3}ln|v| + \frac{1}{3}ln|w| + C = \frac{1}{3}ln\left|\frac{w}{v}\right| + C$$

$$= \frac{1}{3}ln\left|\frac{u - \frac{3}{2}}{u + \frac{3}{2}}\right| + C = \frac{1}{3}ln\left|\frac{x - \frac{7}{2} - \frac{3}{2}}{x - \frac{7}{2} + \frac{3}{2}}\right| + C = \frac{1}{3}ln\left|\frac{x - 5}{x - 2}\right| + C$$

Caso 2. Integrales de la forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Ejercicio 2

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - 3 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-3 - (x^2\text{-}4x + 4 - 4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-3 - (x^2\text{-}4x + 4) + 4}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x - 2)^2}} \quad sea\ u = x\text{-}2;\ \ du = dx$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = arcsen(u) + C = arcsen(x - 2) + C$$

Caso 3. Integrales de la forma

$$\int \frac{(ax + b)dx}{cx^2 + ex + f}$$

Ejercicio 3

En este caso se trata de conseguir a base de manipulación matemática, que el numerador sea la derivada del denominador y luego aplicar el caso 2.

$$\int \frac{(x-2)}{x^2-7x+12}dx = \int \frac{2}{2}\left[\frac{(x-2)}{x^2-7x+12}\right]dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-7x+12}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4-3+3}{x^2-7x+12}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-7}{x^2-7x+12}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-7x+12}$$

Para la primera integral:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-7}{x^2-7x+12}dx \quad sea\ u = x^2-7x+12\ \ du = 2x-7$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-7}{x^2-7x+12}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}ln|u| = \frac{1}{2}ln|x^2-7x+12|$$

Para la segunda integral:

$$\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-7x+12} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}+12} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}$$

Sea $u = x - \frac{7}{2}; du = dx$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{du}{(u)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

Como en el ejercicio 1, resolviendo por fracciones parciales:

$$\frac{1}{(u)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{\left(u+\frac{1}{2}\right)\left(u-\frac{1}{2}\right)} = \frac{A}{u+\frac{1}{2}} + \frac{B}{u-\frac{1}{2}} = \frac{A\left(u-\frac{1}{2}\right)+B\left(u+\frac{1}{2}\right)}{\left(u+\frac{1}{2}\right)\left(u-\frac{1}{2}\right)}$$

$$1 = Au-\frac{1}{2}A+Bu+\frac{1}{2}B = (A+B)u+\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A \quad \rightarrow \quad A = -1; B = 1$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{-du}{u+\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\int \frac{du}{u-\frac{1}{2}} \quad sea\ v = u+\frac{1}{2}\ \ dv = du; \quad w = u-\frac{1}{2}\ \ dw = du$$

$$-\frac{3}{2}\int\frac{dv}{v}+\frac{3}{2}\int\frac{dw}{w}=-\frac{3}{2}ln|v|+\frac{3}{2}ln|w|+C=\frac{3}{2}ln\left|\frac{w}{v}\right|+C=\frac{3}{2}ln\left|\frac{u-\frac{1}{2}}{u+\frac{1}{2}}\right|+C$$

$$=\frac{3}{2}ln\left|\frac{x-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}}\right|+C=\frac{3}{2}ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right|+C$$

$$\int\frac{(x-2)}{x^2-7x+12}dx=\frac{1}{2}ln|x^2-7x+12|+\frac{3}{2}ln\left|\frac{x-4}{x-3}\right|+C$$

Caso 4. Integrales de la forma

$$\int\frac{(ax+b)dx}{\sqrt{cx^2+ex+f}}$$

Ejercicio 4

Al igual que en el ejercicio 3, se tratará de conseguir que el numerador sea la derivada del denominador.

$$\int\frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{3}{2}\int\frac{\left[\frac{2}{3}(3x-1)\right]dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{3}{2}\int\frac{\left[\left(\frac{2}{3}(3x)-\frac{2}{3}\right)\right]dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{\left[\left(2x-\frac{2}{3}\right)\right]dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

El estudiante puede notar que hasta este momento se ha conseguido obtener *2x* en el numerador que es la derivada de x^2 del denominador. El siguiente paso es conseguir colocar el *2* en el numerador para obtener la derivada completa del denominador. Para esto sumamos y restamos una cantidad apropiada hasta obtener *+2* en el numerador.

$$\int\frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{3}{2}\int\frac{2x-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}-\frac{8}{3}}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2-\frac{8}{3}}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx\text{-}\frac{3}{2}\int \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx\text{-}4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

Resolviendo la primera integral:

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx \quad sea\ u = x^2+2x+2; \ \ du = (2x+2)dx$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{3}{2}u^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x^2+2x+2}$$

Resolviendo la segunda integral:

$$4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1+1}}$$

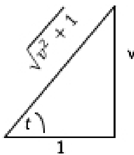
$$= 4\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1^2}} \quad sea\ v = x+1, \qquad dv = dx$$

$$4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = 4\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+1^2}} \quad sea\ v = (1)tg(t) \ \ dv = sec^2tdt$$

$$= 4\int \frac{sec^2tdt}{\sqrt{tg^2t+1}} = 4\int \frac{sec^2t\,dt}{\sqrt{sec^2t}} = 4\int sect\,dt = ln|sect+tgt| + C$$

$$= 4\,ln\left|\frac{\sqrt{v^2+1}}{1} + \frac{v}{1}\right| + C = 4ln\left|\sqrt{(x+1)^2} + x + 1\right| + C$$

La respuesta final es:



$$\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x^2+2x+2}\text{-}4ln\left|\sqrt{x^2+2x+2} + x + 1\right| + C$$

Ejercicios Propuestos

1.	$\int \frac{(6x-5)dx}{\sqrt{3x^2+4x+1}}$	$R: 2\sqrt{3x^2+4x+1}+3\sqrt{3}ln\left\|3x+2\sqrt{9x^2+12x+3}\right\|+C$
2.	$\int \frac{dx}{2x^2+3x+1}$	$R: ln\left\|\frac{2x+1}{x+1}\right\|+C$
3.	$\int \frac{dx}{\sqrt{15-4x-4x^2}}$	$R: \frac{1}{2}arcsen\left(\frac{2x+1}{4}\right)+C$
4.	$\int \sqrt{5-4x-x^2}dx$	$R: \frac{9}{2}\left[arcsen\left(\frac{x+2}{3}\right)+\frac{(x+2)\sqrt{9-(x+2)^2}}{9}\right]+C$
5.	$\int \frac{lnx\,dx}{x\sqrt{1-4lnx-ln^2x}}$	$R: -2arcsn\left(\frac{-2lnx-2}{\sqrt{5}}-\sqrt{5-(lnx+2)^2}\right)+C$

2.7 Integración por sustituciones diversas

Algunos cambios de variables útiles en la solución de integrales son:

2.7.1 Sustitución para integrales de funciones racionales

Tabla 3
Sustituciones recomendadas para integrales de funciones racionales

Integrando de la forma	Sustitución recomendada
$\sqrt[n]{au+b}$	$au+b=z^n$
$\sqrt{q+pu+u^2}$	$q+pu+u^2=(z-u)^2$
$\sqrt{q+pu-u^2}=\sqrt{(\alpha+u)(\beta-u)}$	$q+pu-u^2=(\beta-u)^2z^2$

Ejercicio 1

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$$

La sustitución recomendada en este caso es *1-x=z²*

$$1-x=z^2 \quad \rightarrow \quad x=1-z^2 \quad dx=-2zdz$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}=-\int \frac{2zdz}{(1-z^2)\sqrt{z^2}}=-2\int \frac{zdz}{(1-z^2)z}=-2\int \frac{dz}{1-z^2}=-2\int \frac{dz}{(1+z)(1-z)}$$

Usando el método de fracciones parciales:

$$\frac{1}{(1+z)(1-z)}=\frac{A}{(1+z)}+\frac{B}{(1-z)}=\frac{A(1-z)+B(1+z)}{(1+z)(1-z)}$$

$$1=A-Az+B+Bz \quad \rightarrow \quad 1=(B-A)z+B+A \quad \rightarrow \quad A=\frac{1}{2};B=\frac{1}{2}$$

$$-2\int \frac{dz}{1-z^2}=-2\left[\int \frac{\frac{1}{2}dz}{1+z}+\int \frac{\frac{1}{2}dz}{1-z}\right] \quad sea\ u=1+z, du=dz \quad y\ v=1-z; dv=-dz$$

$$-2\int \frac{dz}{1-z^2}=-2\left[\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}-\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v}\right]=-ln|u|+ln|v|+C=ln|1-z|-ln|1+z|+C$$

$$=ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right|+C$$

Ejercicio 2

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}dx$$

Tomado de: Cálculo Diferencial e Integral de Frank Ayres, Jr.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}dx \ \ sea\ 1+2x=z^3 \quad \rightarrow \quad x=\frac{z^3-1}{2} \quad \rightarrow \quad dx=\frac{3}{2}z^2dz$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}dx=\int \frac{\left(\frac{z^3-1}{2}\right)^2}{z}\frac{3}{2}z^2dz=\frac{3}{8}\int (z^6-2z^3+1)zdz=\frac{3}{8}\int (z^7-2z^4+z)dz$$

$$=\frac{3}{8}\left[\frac{z^8}{8}-2\frac{z^5}{5}+\frac{z^2}{2}\right]+C=\frac{3}{64}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^8-\frac{3}{20}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^5$$

$$+\frac{3}{16}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2+C$$

Ejercicio 3

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}} \quad sea \quad x^2+x+2=(z\text{-}x)^2$$

Además se necesitará reemplazar en función de z a x y dx

$$x^2+x+2=(z\text{-}x)^2 \quad \rightarrow \quad x^2+x+2=z^2 - 2zx+x^2 \quad \rightarrow \quad x+2zx=z^2 - 2$$

$$x(1+2z)=z^2-2 \quad \rightarrow \quad x=\frac{z^2-2}{1+2z}$$

$$\frac{dx}{dz}=\frac{(1+2z)(2z)-(z^2-2)(2)}{(1+2z)^2}=\frac{2z+4z^2-2z^2+4}{(1+2z)^2}=\frac{2z^2+2z+4}{(1+2z)^2}$$

$$dx=\frac{2z^2+2z+4}{(1+2z)^2}dz$$

Reemplazando en la integral original

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}=\int \frac{\frac{2z^2+2z+4}{(1+2z)^2}dz}{\frac{z^2-2}{1+2z}\sqrt{(z\text{-}x)^2}}=\int \frac{\frac{2z^2+2z+4}{(1+2z)^2}}{\frac{z^2-2}{1+2z}(z\text{-}x)}dz=\int \frac{\frac{2z^2+2z+4}{(1+2z)^2}}{\frac{z^2-2}{1+2z}\left(z\text{-}\frac{z^2-2}{1+2z}\right)}dz$$

$$=\int \frac{\frac{2z^2+2z+4}{(1+2z)^2}}{\frac{z^2-2}{1+2z}\left(\frac{z+2z^2\text{-}z^2+2}{1+2z}\right)}dz=\int \frac{\frac{2(z^2+z+2)}{(1+2z)^2}}{\frac{z^2-2}{1+2z}\left(\frac{z^2+z+2}{1+2z}\right)}dz=2\int \frac{dz}{z^2-2}$$

$$=2\int \frac{dz}{(z+2)(z-2)}$$

Integrando por fracciones parciales:

$$\frac{1}{(z+\sqrt{2})(z-\sqrt{2})}=\frac{A}{(z+\sqrt{2})}+\frac{B}{(z-\sqrt{2})}=\frac{A(z-\sqrt{2})+B(z+\sqrt{2})}{(z+\sqrt{2})(z-\sqrt{2})}$$

$$1=Az\text{-}\sqrt{2}A+Bz+\sqrt{2}B=(A+B)z+\sqrt{2}B\text{-}\sqrt{2}A$$

$$A+B=0;\quad \sqrt{2}B\text{-}\sqrt{2}A=1 \quad\rightarrow\quad B=\frac{\sqrt{2}}{4}\quad A=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$2\int\frac{dz}{(z+\sqrt{2})(z-\sqrt{2})}=2\left[\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}dz}{(z+\sqrt{2})}+\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}dz}{(z-\sqrt{2})}\right]=2\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{dz}{(z+\sqrt{2})}+\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{dz}{(z-\sqrt{2})}\right]$$

Haciendo las sustituciones convenientes se tiene:

$$2\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}ln|z+\sqrt{2}|+\frac{\sqrt{2}}{4}ln|z-\sqrt{2}|\right]+C=\frac{\sqrt{2}}{2}ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|+C$$

Despejado z de la sustitución original $x^2+x+2=(z-x)^2$

$$\sqrt{x^2+x+2}=z-x \quad\rightarrow\quad z=x+\sqrt{x^2+x+2}$$

Reemplazando en la respuesta

$$\frac{\sqrt{2}}{2}ln\left|\frac{x-\sqrt{2}+\sqrt{x^2+x+2}}{x+\sqrt{2}+\sqrt{x^2+x+2}}\right|+C$$

Ejercicio 4

$$\int\frac{dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}}\quad sea\ 5-4x-x^2=-(x^2+4x-5)=-(x+5)(x-1)=(x+5)(1-x)$$
$$=(1-x)^2z^2$$

$$(x+5)(1-x)=(1-x)^2z^2 \quad\rightarrow\quad (x+5)=(1-x)z^2 \quad\rightarrow\quad x+5=z^2-xz^2$$

$$x+xz^2=z^2-5 \quad\rightarrow\quad x(1+z^2)=z^2-5 \quad\rightarrow\quad x=\frac{z^2-5}{1+z^2}$$

$$dx=\frac{1+z^2(2z)-(z^2-5)2z}{(1+z^2)^2}=\frac{2z+2z^3-2z^3+10z}{(1+z^2)^2}=\frac{12z}{(1+z^2)^2}dz$$

$$\int\frac{dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}}=\int\frac{\left(\frac{z^2-5}{1+z^2}\right)\frac{12z}{(1+z^2)^2}dz}{((1-x)^2z^2)^{3/2}}=\int\frac{\left(\frac{z^2-5}{1+z^2}\right)\frac{12z}{(1+z^2)^2}dz}{\left((1-x)z\right)^3}$$

$$= \int \frac{\left(\frac{z^2-5}{1+z^2}\right)\frac{12z}{(1+z^2)^2}\,dz}{\left(\left(1-\frac{z^2-5}{1+z^2}\right)z\right)^3} = \int \frac{\left(\frac{z^2-5}{1+z^2}\right)\frac{12z}{(1+z^2)^2}\,dz}{\left(\left(\frac{1+z^2-z^2+5}{1+z^2}\right)z\right)^3}$$

$$= \int \frac{\left(\frac{z^2-5}{1+z^2}\right)\frac{12z}{(1+z^2)^2}\,dz}{\left(\left(\frac{6}{1+z^2}\right)z\right)^3}$$

$$= \int \frac{\left(\frac{z^2-5}{1+z^2}\right)\frac{12z}{(1+z^2)^2}\,dz}{\frac{216z^3}{(1+z^2)^3}} = \int \frac{12z(z^2-5)}{216z^3}\,dz$$

$$= \int \frac{12z^2-60}{216z^2}\,dz = \int \frac{1}{18}\,dz - \int \frac{5}{18z^2}\,dz = \frac{1}{18}z + \frac{5}{18z} + C$$

$$como\ 5-4x-x^2 = (1-x)^2 z^2 \quad \rightarrow \quad z^2 = \frac{5-4x-x^2}{(1-x)^2} \quad \rightarrow \quad z = \sqrt{\frac{5-4x-x^2}{(1-x)^2}}$$

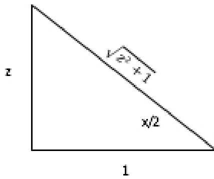
$$= \frac{1}{18}\sqrt{\frac{5-4x-x^2}{(1-x)^2}} + \frac{5}{18\sqrt{\frac{5-4x-x^2}{(1-x)^2}}} + C$$

2.7.2 Sustitución para Integrales de funciones racionales que contienen senos y cosenos

Para el caso de integrales de funciones racionales trigonométricas, se hace el siguiente artificio matemático:

$$sea\ tg\left(\frac{x}{2}\right) = z\ para\ -\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$$

El triángulo rectángulo correspondiente para este caso es:



En base a ese triángulo, las demás funciones serán:

$$sen\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \quad cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$$

Usando las identidades trigonométricas:

$$senx=2sen\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)=2\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\right)=\frac{2z}{z^2+1}$$

$$cosx=cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-sen^2\left(\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\right)^2-\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)^2=\frac{1-z^2}{z^2+1}$$

$$Ya\ que\ tg\left(\frac{x}{2}\right)=z \quad \rightarrow \quad \frac{x}{2}=arctgz \quad \rightarrow \quad x=2arctgz \quad \rightarrow \quad dx=\frac{2dz}{z^2+1}$$

Resumiendo, las expresiones que se necesitan para resolver problemas de integrales racionales que tengan funciones trigonométricas son:

$$senx=\frac{2z}{z^2+1};\ \ cosx=\frac{1-z^2}{z^2+1};\ \ dx=\frac{2dz}{z^2+1}$$

Ejercicio 1

$$\int\frac{dx}{5-4senx+3cosx} \quad sea: senx=\frac{2z}{1+z^2};\ cosx=\frac{1-z^2}{1+z^2};\ dx=\frac{2dz}{1+z^2}$$

$$\int\frac{dx}{5-4senx+3cosx}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{5-4\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)+3\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}$$

$$= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{5(1+z^2) - 8z + 3 - 3z^2}{1+z^2}}$$

$$= \int \frac{2dz}{5(1+z^2) - 8z + 3 - 3z^2}$$

$$= \int \frac{2dz}{2z^2 - 8z + 8} = \int \frac{dz}{z^2 - 4z + 4} = \int \frac{dz}{(z-2)^2} \quad sea\ u = z - 2; du = dz$$

$$= \int \frac{du}{(u)^2} = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{z-2} + C$$

$$= -\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right) - 2} + C$$

Ejercicios propuestos

1.	$\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+2x}}$	$R: \frac{3}{8}\left[\frac{1}{8}(1+2x)^{8/3} - \frac{2}{5}(1+2x)^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{2}(1+2x)^{2/3}\right] + C$
2.	$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$	$R: \frac{3}{2}x^{2/3} - \frac{6}{7}x^{7/6} + C$
3.	$\int x^2\sqrt{3x+4}\,dx$	$R: \frac{2}{27}\left[\frac{1}{7}\left(\sqrt{3x+4}\right)^7 - \frac{8}{5}\left(\sqrt{3x+4}\right)^5 + \frac{16}{3}\left(\sqrt{3x+4}\right)^3\right] + C$
4.	$\int \sqrt{1-e^x}\,dx$	$R: 2\sqrt{1-e^x} + ln\left\vert\frac{\sqrt{1-e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1}\right\vert + C$
5.	$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}$	$R: \frac{x}{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}} + C$
6.	$\int \frac{xdx}{\left(\sqrt{5-4x-x^2}\right)^3}$	$R: \frac{5-2x}{9\sqrt{5-4x-x^2}} + C$
7.	$\int \frac{dx}{2+cosx}$	$R: \frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\left[\frac{\sqrt{3}}{3}tg\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C$

8.	$\int \frac{dx}{senx + tgx}$	$R: -\frac{1}{4}tg^2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right\| + c$
9.	$\int \frac{dx}{\sqrt{cosx + cos^2x}}$	$R: \sqrt{2}arcsen\left[tg\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C$
10.	$\int \frac{dx}{1 + cosx + senx}$	$R: ln\left\|1 + tg\left(\frac{x}{2}\right)\right\| + C$

2.8 Uso de tablas de integración

A estas alturas, el estudiante ya sabe integrar usando las distintas técnicas enseñadas. En la práctica, las integraciones se realizan con ayuda de tablas o más recientemente por medio de software que están disponibles en internet, ya sea libres o para comprar por valores que varían desde precios muy cómodos hasta bastante caros debido a las prestaciones que realizan. En la parte final de este libro, el estudiante dispone de una tabla bastante útil para la mayoría de los casos.

Se recomienda al profesor no divulgar la existencia de esta tabla hasta asegurarse que el estudiante domina realmente las diferentes técnicas.

Capítulo 3
Integral Definida

En el capítulo anterior se aprendió a integrar, entendiendo la integral como antiderivada. Siendo las matemáticas una ciencia que sirve para resolver problemas cuantitativos de otras ciencias, en este capítulo se estudiarán las aplicaciones de las integrales. La primera de ellas, el cálculo del área baja una curva.

3.1 Área aproximada bajo una curva. La Suma de Rieman y la Integral Definida

Suponga que se quiere calcular el área bajo la curva generada por la función *f(x)=0.5x+2* entre *x=1* y *x=4.* Como se puede ver en la figura 2, la función está representada por una recta y el área baja la recta forma un trapecio cuya altura y bases se las calcula de la siguiente manera:

$$altura\ (h) = 3 - 1 = 2$$

Observe que tanto la base mayor como la base menor es el valor de la función para ese valor de *x.*

$$base\ mayor\ (B) = f(3) = 0.5(3) + 2 = 3.5$$

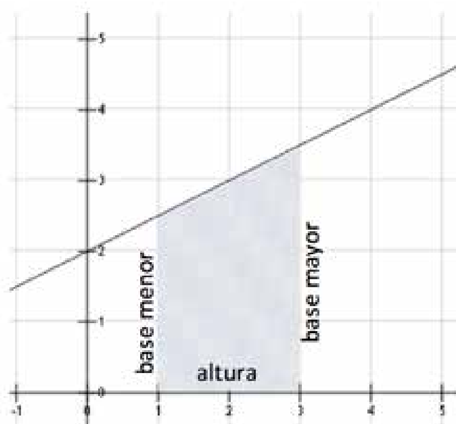
$$base\ menor\ (b) = f(1) = 0.5(1) + 2 = 2.5$$

$$Área_T = \left(\frac{B + b}{2}\right) h$$

$$Área_T = \left(\frac{3.5 + 2.5}{2}\right) 2 = 6u^2$$

En donde u^2 representa una unidad cualquiera de superficie.

Figura 2
Área bajo una recta

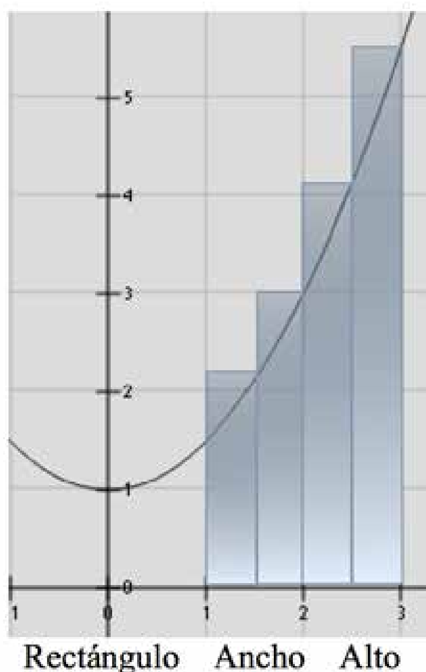


En este caso, el cálculo del área bajo la curva fue fácil ya que se trata de una recta y se pudo usar una figura geométrica conocida como es el trapecio, pero que sucede si se desea calcular el área bajo la curva de una función cualquiera como $f(x)=0.5x^2$ en donde no se puede usar fórmulas directas ya desarrolladas. En este caso se divide el área en varias áreas de fácil cálculo como por ejemplo un rectángulo.

Ejemplo 1: Calcular aproximadamente el área bajo la curva de la función $f(x)=0.5x^2+1$ entre $x=1$ y $x=3$.

Rectángulo	Ancho	Alto	Área
1	*0.5*	$0.5(1.5)^2+1=2.125$	$(0.5)(2.125)=1.0625$
2	*0.5*	$0.5(2.0)^2+1=3.000$	$(0.5)(3.000)=1.5000$
3	*0.5*	$0.5(2.5)^2+1=4.125$	$(0.5)(4.125)=2.0625$
4	*0.5*	$0.5(3.0)^2+1=5.500$	$(0.5)(5.500)=2.7500$
		Área Total	$7.375u^2$

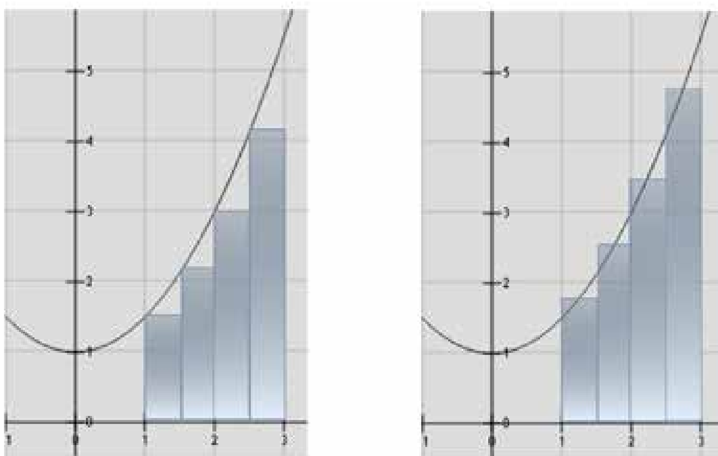
Figura 3
Cálculo del área bajo una curva por exceso



El estudiante se habrá dado cuenta que el área calculada debe ser mayor que el área real, ya que todos los rectángulos tienen un sobrante por encima de la curva. Esta es entonces una aproximación por exceso.

Con la idea de calcular áreas más aproximadas se pueden usar otros tres métodos como el de la aproximación por defecto, el de rectángulos centrados y el de los trapecios que se muestran en las figuras 4 y 5.

Figura 4
Cálculo de área bajo una curva. A la derecha por defecto y a la izquierda con rectángulos centrados



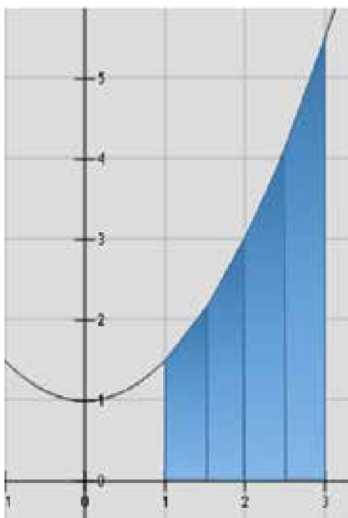
Cálculo del área bajo la curva usando áreas por defecto

Rectángulo	Ancho	Alto	Área
1	*0.5*	$0.5(1)^2+1=1.5$	*(0.5)(1.5)=0.7500*
2	*0.5*	$0.5(1.5)^2+1=2.125$	*(0.5)(2.125)=1.0625*
3	*0.5*	$0.5(2)^2+1=3$	*(0.5)(3)=1.5000*
4	*0.5*	$0.5(2.5)^2+1=4.125$	*(0.5)(4.125)=2.0625*
		Área Total	$5.3750u^2$

Cálculo del área bajo la curva usando rectángulos centrados

Rectángulo	Ancho	Alto	Área
1	*0.5*	$0.5(1.25)^2+1=1.78125$	*(0.5)(1.78125)=0.8906*
2	*0.5*	$0.5(1.75)^2+1=2.53125$	*(0.5)(2.53125)=1.2656*
3	*0.5*	$0.5(2.25)^2+1=3.53125$	*(0.5)(3.53125)=1.7656*
4	*0.5*	$0.5(2.75)^2+1=4.78125$	*(0.5)(4.78125)=2.3906*
		Área Total	$6.3124u^2$

Figura 5
Cálculo del área bajo una curva por trapecios

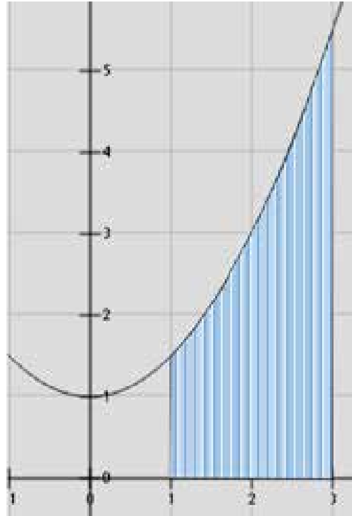


Cálculo del área bajo la curva usando trapecios

Rectán-gulo	**Ancho (h)**	**Base Menor (bm)**	**Base Mayor (BM)**	$\text{Area} = \left(\frac{\text{bm} + \text{BM}}{2}\right)\text{h}$
1	*0.5*	*0.5(1)²+1=1.5*	*0.5(1.5)²+1=2.125*	*0.90625*
2	*0.5*	*0.5(1.5)²+1=2.125*	*0.5(2.0)²+1=3.000*	*1.35294*
3	*0.5*	*0.5(2)²+1=3*	*0.5(2.5)²+1=4.125*	*1.78125*
4	*0.5*	*0.5(2.5)²+1=4.125*	*0.5(3.0)²+1=5.500*	*2.40625*
			Área Total	*6.44669u²*

A continuación se presenta algunos cálculos de áreas para diferentes valores de ancho de rectángulos o lo que es lo mismo, incrementos de x usando el método del área por exceso.

Figura 6
Incremento del número de rectángulos



Incremento	Área (u^2)
0.5	6.44669
0.25	6.84375
0.1	6.53500
0.05	6.43375

El área correcta es 19/3 u^2 que es aproximadamente igual a 6.33333 u^2. El estudiante puede intuir entonces que mientras más estrechos se hacen los rectángulos, la sumatoria se aproxima más al valor real. Cuando los rectángulos se hacen muy estrechos, el número de éstos se hace muy elevado. En cálculo, esto se expresa como

$$A_{bajo\ la\ curva} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f_{(x_i)} \Delta x_i$$

(Stein & y Barcellos, 1995, p. 246).

3.2 Definición de la Integral Definida

De acuerdo a lo dicho en la sección anterior, se puede concluir informalmente que

$$\boldsymbol{A_{bajo\ la\ curva} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_{(x_i)}\Delta x_i = \int_a^b f_{(x)}dx}$$

(Stewart, 2010, p. 343).

En donde la sumatoria se conoce como la Suma de Rieman y la definición se la puede expresar de la siguiente manera:

Sea *f* una función que está definida en el intervalo [a,b]. Al $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$ se le denomina la integral definida (o integral de Riemann) de *f* de *"a"* a *"b"* y se denota de la siguiente manera:

$$\int_a^b f_{(x)}dx$$

Además, si existe este límite, decimos que *f* es integrable en [a,b]. (Villena, s.f.)

El cálculo de la integral se lo describe con la siguiente fórmula:

Sea *f* una función continua en [a,b] y sea *F* la antiderivada de *f* en ese intervalo, entonces:

$$\boldsymbol{\int_a^b f_{(x)}dx = F_{(b)} - F_{(a)}}$$

(Stewart, 2010, p. 356).

Para el ejemplo 1, la función era $f(x)=0.5x^2+1$ y el área a calcular estaba comprendida entre la función, el eje x, $x=1$ y $x=3$.

Reemplazando esto en el Teorema Fundamental del Cálculo Integral se tiene:

$$\int_1^3 (0.5x^2+1)dx = 0.5\frac{x^3}{3}+x\Big|_1^3$$

Observe que a diferencia de lo que se ha visto hasta ahora en integrales indefinidas, esta vez el símbolo de integral va acompañado de los límites superior (3) en la parte de arriba del símbolo y el límite inferior (1) en la parte de abajo del símbolo.

La respuesta de la integral, de acuerdo al teorema fundamental, debe ser evaluado tanto en el límite superior como en el límite inferior y estos resultados restados.

Respuesta evaluada en el límite superior:

$$\frac{1}{6}(3)^3+3=\frac{15}{2}$$

Respuesta evaluada en el límite inferior:

$$\frac{1}{6}(1)^3+1=\frac{7}{6}$$

El área bajo la curva es la diferencia de los dos valores calculados

$$A=\frac{15}{2}-\frac{7}{6}=\frac{19}{3}u^2 \approx 6.333u^2$$

3.3 Propiedades de la integral definida

Propiedades de las integrales definidas que servirán para la solución de problemas son las siguientes:

$$1.-\int_a^b f_{(x)}dx = -\int_b^a f_{(x)}dx \ \ para\ b>a$$

(Stewart, 2010, p. 350).

Interpretación

Ya que al reemplazar los límites en la integral, se estaría restando el límite inferior (menor) menos el límite superior (mayor). El resultado, lógicamente saldría negativo.

$$2.-\int_a^a f_{(x)}dx = 0$$

Interpretación

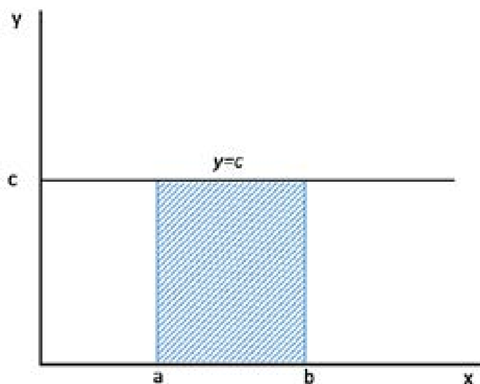
Al ser *a=a*, la base de los rectángulos diferenciales es cero, el área de esos rectángulos es cero y la suma de todos esos rectángulos diferenciales es cero.

$$3.-\int_a^b c dx = c(b— a)$$

Interpretación

En este caso *y=c* es una función constante, su gráfica es una recta horizontal y el área bajo la curva es la del rectángulo que se muestra en la figura

Figura 7
Interpretación de la propiedad 3



$$4.- \int_a^b [f_{(x)} \pm g_{(x)}]dx = \int_a^b f_{(x)}dx \pm \int_a^b g_{(x)}dx$$

Interpretación

El área bajo la curva del resultado de la suma de dos funciones *f* y *g* es igual a la suma del área bajo la curva de *f* más el área bajo la curva de *g*.

$$5.- \int_a^b cf_{(x)}dx = c\int_a^b f_{(x)}dx \; para \; c \in \mathbb{R}$$

Interpretación

El área bajo la curva del resultado de multiplicar una constante *c* por una función *f* es igual al área bajo la curva de *f* multiplicado por la constante *c*.

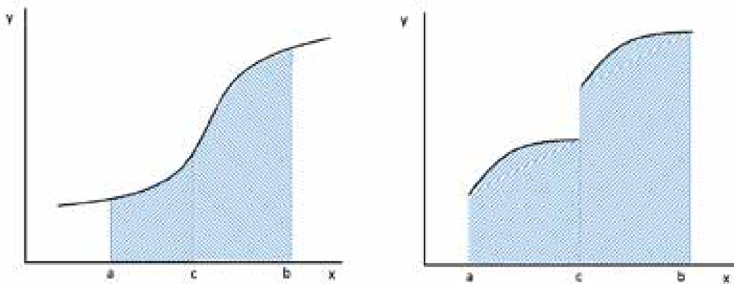
$$6.- \int_a^b f_{(x)}dx = \int_a^c f_{(x)}dx + \int_c^b f_{(x)}dx$$

(Stewart, 2010, p. 350).

Interpretación

El área bajo la curva de la función *f* puede ser descompuesta en dos áreas, una primera área entre *a* y *c* y otra área entre *c* y *b* como se muestra en la figura 8

Figura 8
Área bajo curvas. A la izquierda por tramos y a la derecha con saltos



Esta propiedad es muy útil cuando se trata de encontrar áreas bajo curvas de funciones que contienen saltos dentro del intervalo como en la figura 8 derecha.

$$7. - Si\ f_{(x)} \geq 0\ para\ a \leq x \leq b, entonces\ \int_a^b f_{(x)}dx \geq 0$$

Interpretación

Si la función es positiva en [a,b] entonces el área bajo la curva en [a,b] también es positiva, es decir, está sobre el eje *x*.

$$8. - Si\ f_{(x)} \geq g_{(x)}\ para\ a \leq x \leq b, entonces\ \int_a^b f_{(x)}dx \geq \int_a^b g_{(x)}dx \geq 0$$

(Purcell, Varberg, & Rigdon, 2007, p. 235).

Interpretación

Si la función *f* es mayor que la función *g* entonces, el área bajo la curva *f* será mayor que el área bajo la curva *g*.

$$9. - Si\ m \leq f_{(x)} \leq M\ para\ a \leq x \leq b, entonces\ \ m(b - a) \leq \int_a^b f_{(x)}dx \leq M(b - a)$$

(Purcell, Varberg, & Rigdon, 2007, p. 236).

Interpretación

m(b-a) es un rectángulo de altura *m* y base *(b-a)*. *M(b-a)* es un rectángulo de altura *M* y base *(b-a)*. El área de la función *f* estará comprendida entre el área *m(b-a)* y el área *M(b-a)*.

3.4 Cambio de límites correspondiente a un cambio de variable

En la sección 2.1 del capítulo 2 se vio que uno de los métodos recomendados para integrar era cambiar la variable original para luego una vez integrado, se regresaba a la variable original. En ocasiones

ese retorno a la variable original es un poco engorroso. En estos casos la integral definida nos permite entregar la respuesta en función de la nueva variable, sin necesidad de retornar a la variable original pero con un cambio en los límites de acuerdo a la nueva variable. El siguiente ejercicio muestra el procedimiento:

Ejercicio 1

$$\int_0^1 x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}dx \quad sea\, u = x^2+1 \quad du = 2xdx \quad xdx = \frac{du}{2}$$

Reemplazando los límites en las x en la ecuación para cambiar la variable

Para el límite inferior: $u=0^2+1=1$

Para el límite superior: $u=1^2+1=2$

La integral con la nueva variable y los nuevos límites es:

$$\frac{1}{2}\int_1^2 u^{3/2}du = \frac{1}{2}\left|\frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right|_1^2 = \frac{1}{5}\left|u^{5/2}\right|_1^2 = \frac{1}{5}\left[2^{5/2} - 1^{5/2}\right] = \frac{1}{5}\sqrt{2^5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}\sqrt{2} - \frac{1}{5} = 0.9314$$

Comprobando el resultado al regresar a la variable original:

$$\frac{1}{5}\left|u^{5/2}\right|_1^2 = \frac{1}{5}\left|(x^2+1)^{\frac{5}{2}}\right|_0^1 = \frac{1}{5}\left[2^{5/2}\text{-}1^{5/2}\right] = 0.9314$$

Ejercicio 2

$$\int_{\pi^2/9}^{\pi^2/4} \frac{cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \quad sea\, u = \sqrt{x} \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad dx = 2\sqrt{x}du$$

Nuevos límites:

$$límite\ inferior: u = \sqrt{\frac{\pi^2}{9}} = \frac{\pi}{3}; \quad límite\ superior: u = \sqrt{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{2}$$

La nueva integral queda

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{cosu}{\sqrt{x}} 2\sqrt{x}du = 2|senu| \begin{matrix} \pi/2 \\ \pi/3 \end{matrix} = 2\left[sen\left(\frac{\pi}{2}\right) — sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\left(1 — \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 — \sqrt{3}$$

Ejercicios propuestos

Se recomienda al estudiante realizar los siguientes ejercicios tanto por cambio de límites como con retorno a la variable original para que se dé cuenta de las ventajas.

1.	Encontrar el área bajo la curva de la función *f(x)=1/x* en forma aproximada (por exceso) entre 1 y 3, usando rectángulos con incrementos de 0.25	$R: 1.2865u^2$
2.	Encontrar el área bajo la curva de la función $f_{(x)} = e^{-x^2}$ en forma aproximada (por defecto) entre 0 y 2, usando rectángulos con incrementos de 0.25	
3.	$\int_0^{\pi/3} cos^4x\ senx\ dx$	$R: \frac{31}{160} \approx 0.1975$
4.	$\int_1^3 \left[\frac{1}{2x — 1} — \frac{1}{2x + 1}\right] dx$	$R: \frac{1}{2} ln\left(\frac{15}{7}\right) \approx 0.3811$
5.	$\int_2^4 \frac{e^{lnx}}{x^2 + 7} dx$	$R: \frac{1}{2} ln\left(\frac{23}{11}\right) \approx 0.3687$
6.	$\int_0^1 \frac{arctgx}{x^2 + 1} dx$	$R: \frac{\pi^2}{32} \approx 0.3084$
7.	$\int_6^9 \frac{3lnx - 5}{x} dx$	$R: 0.3988$

Capítulo 4

Aplicaciones de la Integral Definida

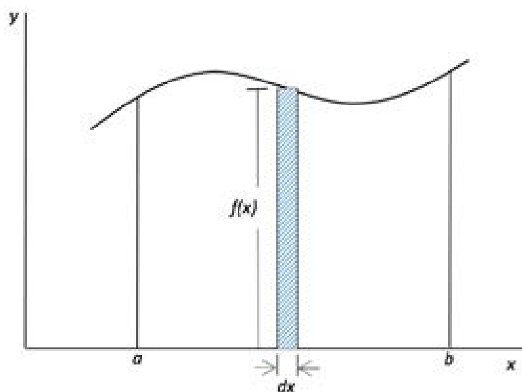
En la sección 3.1 se vio que la interpretación de la integral definida era el área bajo la curva, resultado de la sumatoria de todos los muchos rectángulos en que se había divido el área bajo la función. En este capítulo se verá esa aplicación para distintos casos más complejos que los de la sección mencionada, así como otras aplicaciones.

4.1 Áreas

4.1.1 Integración respecto a x

Sea *f(x)* una función integrable cualquiera en el intervalo [a,b] y se desea calcular el área bajo la curva que genera.

Figura 9
Cálculo del área bajo una curva generada por una función cualquiera f[x)



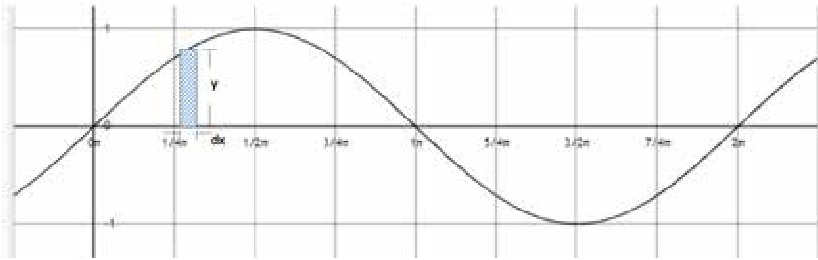
El área deseada será la suma de todos los rectángulos diferenciales, cuya área diferencial (base x altura) es

$$dA = f_{(x)}dx$$

La suma de todas las áreas diferenciales será

$$A = \int_a^b f_{(x)}dx$$

Figura 10
Área bajo la curva de f(x)=senx



Ejercicio 1

Calcular el área bajo la curva de la función *y=senx* en [0, π]

El área diferencial dibujada en la figura es

$$dA = senx\ dx$$

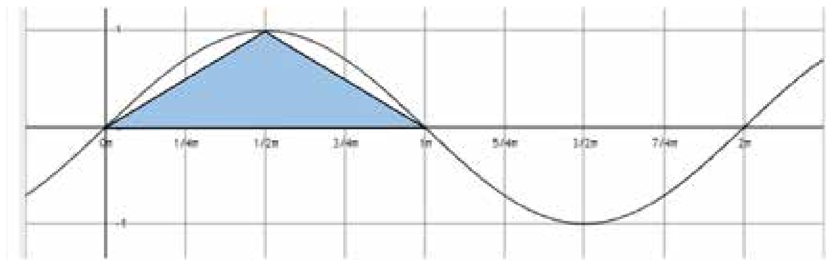
$$A = \int_0^{\pi} senx\ dx = -|cosx|_0^{\pi} = -[\cos(\pi) - \cos(0)] = -(-1 - 1) = 2u^2$$

Se recomienda al estudiante tratar de comprobar siempre sus resultados. Si no se puede hacerlo de forma exacta, por lo menos entonces de forma aproximada. En el caso del ejemplo 1, una comprobación rápida puede ser aproximando figuras geométricas conocidas, cuya área sea fácil de calcular, por ejemplo un triángulo.

Comprobación

Puede darse el caso que se necesite calcular el área entre dos funciones como el de la figura 10

Figura 11
Comprobación del área calculada comparando con áreas conocidas



$$\text{Área del triángulo sombreado} = \frac{\pi(1)}{2} \approx 1.5708u^2$$

Si bien es verdad, este resultado es menor al calculado, pero tiene su explicación por ser menor al área verdadera y al menos da una idea si el cálculo realizado no esté demasiado alejado.

En ocasiones puede ser que se necesite ya no calcular el área entre la función y el eje x, sino, el área entre la función y el eje y, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejercicio 2

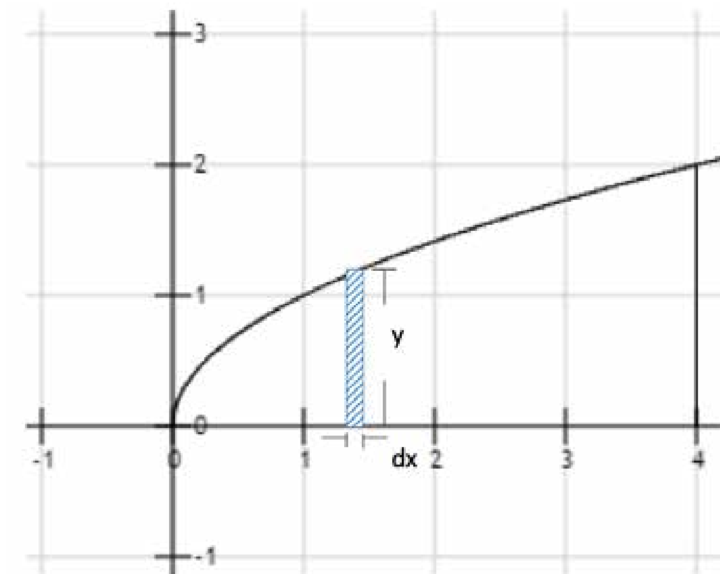
Encontrar el área que se haya bajo la curva y a la izquierda de ella de la función $y = \sqrt{x}$ entre $x=0$ y $x=4$.

1. Área bajo la curva

$$A = \int_0^4 ydx = \int_0^4 \sqrt{x}dx = \int_0^4 x^{1/2}dx$$

$$A = \left| \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right|_0^4 = \frac{2}{3}\left(4^{3/2} - 0\right) = \frac{16}{3} u^2$$

Figura 12
Área bajo la curva de la función y=√x



4.1.2 Integración respecto a y

Ejercicio 1

Para este caso, es mejor trabajar con rectángulos diferenciales horizontales, cuya área diferencia es:

$$dA = xdy$$

Es necesario poner x en función de y para manejar una sola variable dentro del integral. Despejando x de la función original

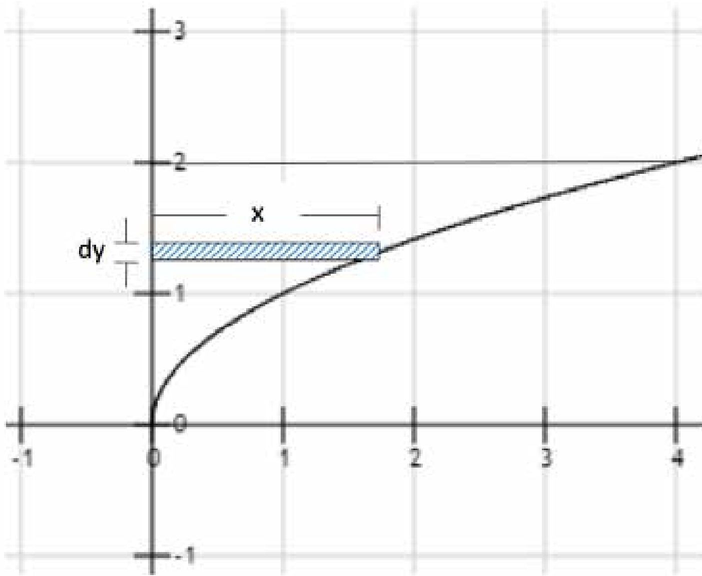
$$x = y^2$$

Reemplazando este valor en el área diferencial

$$dA = y^2 dy$$

$$A = \int_0^2 y^2 dy = \left|\frac{y^3}{3}\right|_0^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 0) = \frac{8}{3}u^2$$

Figura 13
Área a la izquierda de la función y=√x

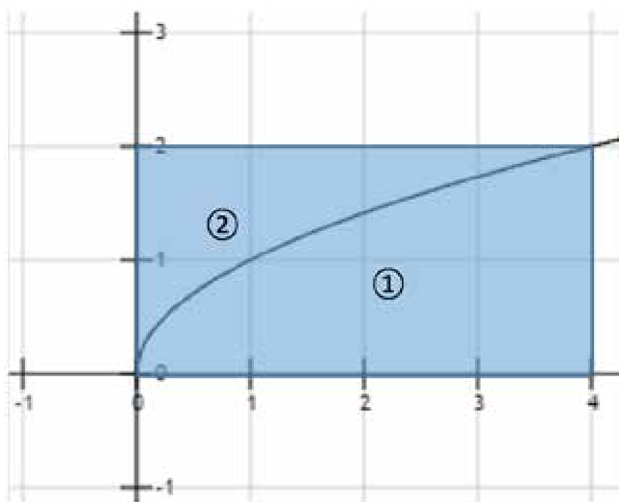


Observe que si se suman las dos áreas, el resultado es el área del rectángulo de base 4 y altura 2, cuya área es 8u² que es el resultado de sumar los dos resultados obtenido por integración, es decir:

$$\acute{A}rea\ del\ rect\acute{a}ngulo = \acute{a}rea\ ① + \acute{a}rea\ ②$$

$$\acute{A}rea\ del\ rect\acute{a}ngulo = \frac{16}{3} + \frac{8}{3} = \frac{24}{3} = 8u^2$$

Figura 14
Comprobación del cálculo de ambas áreas para la función y=√x



3. Área entre curvas

Es posible que en algún momento se tenga la necesidad de calcular el área comprendida entre dos curvas. En este caso, el área deseada será la diferencia del área bajo la curva *f(x)* menos el área bajo la curva *g(x)*.

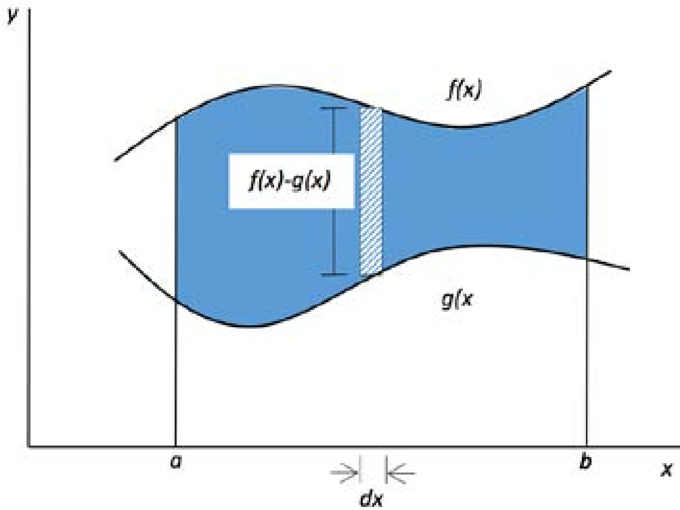
$$A = \int_a^b f_{(x)} dx - \int_a^b g_{(x)} dx$$

Sacando factor común

$$A = \int_a^b (f_{(x)} - g_{(x)}) dx$$

En donde *f(x)-g(x)* es el valor de la altura del rectángulo diferencial mostrado en la figura 15.

Figura 15
Cálculo del área entre dos curvas



Ejercicio 2

Encuentre el área entre las curvas $y=6-x^2$ y la recta $y=x$.

Para poder plantear el problema, se necesita conocer los puntos de intersección de ambas funciones, lo que se obtiene igualando las ecuaciones.

$$6-x^2=x \quad \rightarrow \quad x^2+x-6=0$$

$$(x+3)(x-2)=0 \quad \rightarrow \quad x_1=-3;\ x_2=2$$

$$A=\int_{-3}^{2}[f_{(x)}\text{-}g_{(x)}]dx$$

En donde $f(x)= 6-x^2$ y $g(x)=x$

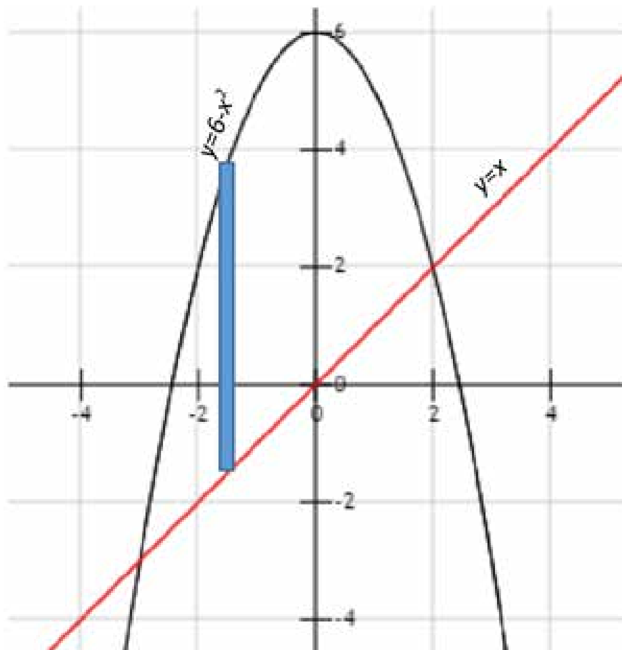
$$A=\int_{-3}^{2}[6-x^2-x]dx=\int_{-3}^{2}6dx-\int_{-3}^{2}x^2dx-\int_{-3}^{2}xdx$$

$$A = 6|x|\,\begin{matrix}2\\-3\end{matrix} - \left|\frac{x^3}{3}\right|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix} - \left|\frac{x^2}{2}\right|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}$$

$$= 6[2+3] - \frac{1}{3}[2^3 - (-3)^3] - \frac{1}{2}[2^2 - (-3)^2]$$

$$A = 30 - \frac{35}{3} + \frac{5}{2} = \frac{125}{6}u^2$$

Figura 16
Gráfico del ejercicio 2



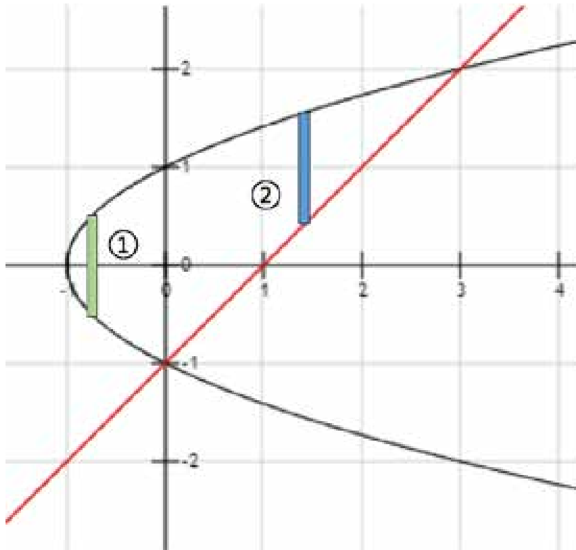
Ejercicio 3

Encontrar el área comprendida entre las curvas $y^2=x+1$ y la recta $y=x-1$ usando rectángulos diferenciales verticales y horizontales.

Rectángulos diferenciales verticales

Con este método tenemos que dividir el área en dos regiones 1 y 2 como muestra el gráfico. Se hace esto ya que en la región 1 no hay dos funciones para restar, mientras que en la región 2 si se puede restar las dos funciones.

Figura 17
Gráfica del ejercicio 3 para rectángulos diferenciales verticales



Para encontrar los límites de integración, es necesario calcular los puntos de intersección:

Igualando las dos ecuaciones en función de y se tiene:

$$y^2 - 1 = y + 1 \quad \rightarrow \quad y^2 - y - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (y-2)(y+1) = 0 \quad \rightarrow \quad y_1 = 2,\ y_2 = -1$$

Reemplazando estos valores en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores se tiene

$$x_1 = 3, x_2 = 0$$

Los puntos de intersección son *(0,-1)* y *(3,2)*

$$A_1 = \int_{-1}^{0} 2y dx = 2\int_{-1}^{0} \sqrt{x+1}\, dx$$

$sea\, u = x + 1 \quad \rightarrow \quad du = dx.$ Los límites cambian para $x = -1\;\; u = 0, para\; x = 0\; u = 1$

$$A_1 = 2\int_{0}^{1} u^{1/2} du = 2\left(\frac{2}{3}\right)\left|u^{3/2}\right|\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = \frac{4}{3}(1-0) = \frac{4}{3}u^2$$

$$A_2 = \int_{0}^{3} (y_2 - y_1) dx = \int_{0}^{3} \left[\sqrt{x+1} - (x-1)\right] dx = \int_{0}^{3} \sqrt{x+1}\, dx - \int_{0}^{3} x dx + \int_{0}^{3} dx$$

Haciendo la misma sustitución de variable y cambio de límites para la primera integral se tiene:

$$A_2 = \int_{1}^{4} u^{1/2} du - \int_{0}^{3} x dx + \int_{0}^{3} dx = \frac{2}{3}\left|u^{3/2}\right|\begin{matrix}4\\1\end{matrix} - \frac{1}{2}\left|x^2\right|\begin{matrix}3\\0\end{matrix} + \left|x\right|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}$$

$$= \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} \text{-} 1^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{2}(3^2 - 0) + (3 - 0) = \frac{2}{3}(8 - 1) - \frac{9}{2} + 3 = \frac{19}{6}$$

$$A_T = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{9}{2}u^2$$

Rectángulos diferenciales horizontales

$$A = \int_{-1}^{2} (x_2 - x_1) dy$$

$$= \int_{-1}^{2} [(y+1) - (y^2 - 1)] dy$$

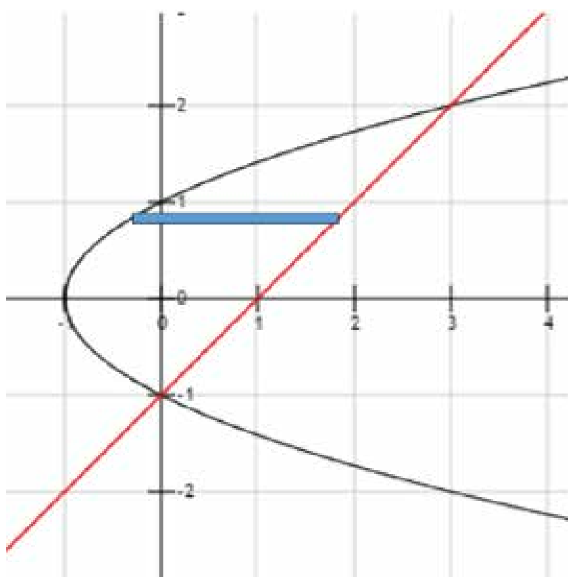
$$= \int_{-1}^{2} (y - y^2 + 2) dy$$

$$= \int_{-1}^{2} y dy - \int_{-1}^{2} y^2 dy + 2\int_{-1}^{2} dy$$

$$= \frac{1}{2}|y^2| \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} - \frac{1}{3}|y^3| \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} + 2|y| \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$$

$$A = \frac{1}{2}[2^2 - (-1)^2] - \frac{1}{3}[2^3 - (-1)^3] + 2[2 - (-1)] = \frac{3}{2} - \frac{9}{3} + 6 = \frac{9}{2}u^2$$

Figura 18
Gráfica del ejercicio 3 para rectángulos diferenciales horizontales



El resultado es el mismo como debe ser, sin embargo se aprecia que el segundo método es más directo en este caso, es por esto que es necesario un análisis previo para decidir que método usar.

Ejercicios propuestos

1. Encontrar el área bajo la curva de la función $f_{(x)} = \frac{1}{x}$ en forma aproximada (por exceso) entre 1 y 3, usando rectángulos diferenciales con incrementos de 0.25.

R: 1.2865 u^2

2. Encontrar el área bajo la curva de la función $f_{(x)} = e^{-x^2}$ en forma aproximada (por defecto) entre 0 y 2, usando rectángulos diferenciales con incrementos de 0.25.

R: 0.6639 u^2

3. Encontrar el área bajo la curva de la función $f_{(x)} = x^3 - x^2 - 6x$ en forma aproximada por el método de los trapecios entre 0 y 2, con incrementos de 0.25.

R: 5.2497 u^2

4. Hallar el área comprendida entre la función $y= -x^2+5$ y el eje x, usando a) rectángulos diferenciales verticales, b) rectángulos diferenciales horizontales.

R: $\frac{20}{3}\sqrt{5}\, u^2$

5.- Encontrar el área comprendida entre las curvas $y=8-2x^2$; $y=4-x^2$.

R: $\frac{32}{3}\, u^2$

6.- Encontrar el área comprendida entre las curvas $y=x^2$; $y=x^3$

R: $\frac{1}{12}\, u^2$

7.- Encontrar el área limitada por la curva $y^2-2y+x-8=0$, las rectas $x=0$; $y=-1$; $y=3$

R: $\frac{92}{3}\, u^2$

8. Encontrar el área de la región comprendida entre las curvas $y=x^4-2x^3+2$; $x=-1$; $x=2$; $y=-x+7/4$

R: $\frac{27}{20}\, u^2$

9. Hallar el área comprendida entre las curvas $y=2x;\ y=(1/2)(x^3)$ en el primer cuadrante, usando rectángulos diferenciales horizontales.

R: 4 u^2

10. Usando integrales, calcular el área de la elipse con centro en el origen, semieje mayor "a" y semieje menor "b".

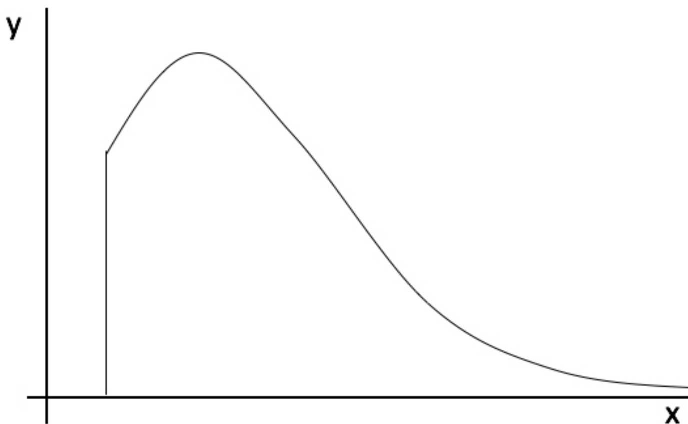
R: πab

4.2 Integrales impropias

Este es una aplicación especial de área bajo la curva, pues se trata de áreas no cerradas como se aprecia en las figuras 19, 20, 21 y 22 o dicho con propiedad, la función no está definida en uno o en ambos extremos del intervalo, o en algún punto intermedio del mismo. Se presentan entonces dos casos:

Caso 1. Uno o los dos puntos fronterizos del intervalo de integración son infinitos

Figura 19
Área bajo una curva no cerrada



a. El punto fronterizo superior del intervalo es infinito

$$\int_a^\infty f_{(x)}dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f_{(x)}dx$$

Siempre que el límite de la función exista y sea igual a un número finito

b. El punto fronterizo inferior del intervalo es infinito

$$\int_{-\infty}^b f_{(x)}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f_{(x)}dx$$

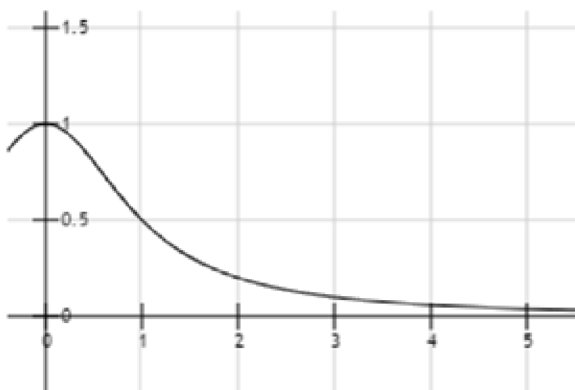
Siempre que el límite de la función exista y sea igual a un número finito

Ejercicio 1

Calcular el área bajo la curva generada por la función $\frac{1}{1+x^2}$ en $[0,\infty)$:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$$

Figura 20
Gráfica del Ejercicio 1

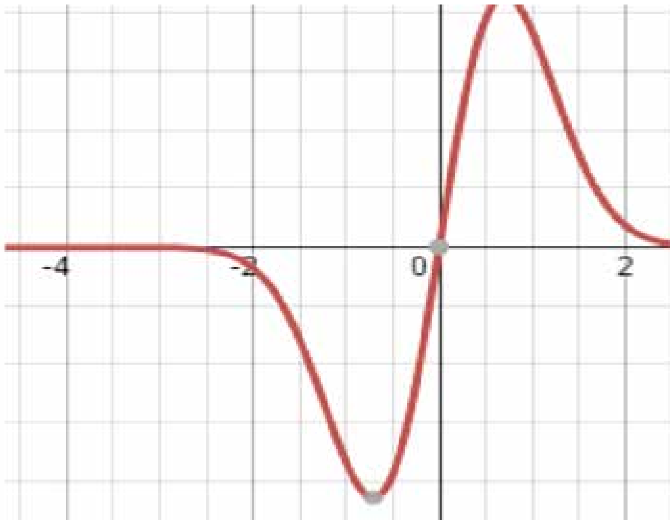


Como se puede apreciar en la figura 20. El área no se cierra a la derecha de la curva, entonces se aplican los límites como se muestra a continuación:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to\infty} |arctg(x)| \begin{matrix} b \\ 0 \end{matrix} = \lim_{b\to\infty} [arctg(b)\text{-}arctg(0)] = \frac{\pi}{2}$$

Ejercicio 2

Figura 21
Gráfica del ejercicio 2



Calcular el área bajo la curva generada por la función xe^{-x^2} en (-∞,-1]:

$$\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2} dx$$

En la figura 21 se puede apreciar, que en este caso el área no se cierra a la izquierda y los límites quedan como sigue:

$$\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to\infty}\int_a^{-1} xe^{-x^2}dx \qquad sea\ u = -x^2 \quad du = -2xdx \quad \to \quad xdx = -\frac{du}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}\int_a^{-1} e^u du\right] = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}|e^u|\,\begin{matrix}-1\\a\end{matrix} = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left|e^{-x^2}\right|\,\begin{matrix}-1\\a\end{matrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-(-1)^2} - 0\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{e}\right] = -\frac{1}{2e}$$

Como existe el límite, se dice que la integral converge y su valor es $-\frac{1}{2e}$

Caso 2. La función se vuelve infinito en algún punto intermedio "c" del intervalo de integración [a,b]

$$\int_a^b f_{(x)}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{c-\epsilon} f_{(x)}dx + \lim_{\epsilon'\to 0}\int_{c+\epsilon'}^{b} f_{(x)}dx$$

Ejercicio 3

Calcular el área bajo la curva generada por la función $\frac{1}{x-1}$ en [0,3]:

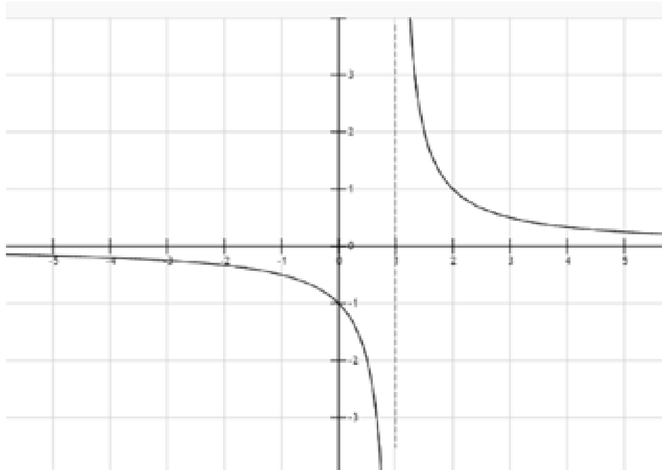
En la figura 22 se aprecia cómo el área se interrumpe dentro del intervalo en

x=1 que está dentro de [0,3].

Al resolver el integral $\int_0^3 \frac{1}{x-1}dx$ se pude estar tentado a resolverla como una integral común y corriente, pero al observar la figura se aprecia cómo el área se interrumpe dentro del intervalo [0,3], por tanto es importante el análisis de la continuidad de la función antes de resolver el integral.

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{x-1}dx + \lim_{\epsilon'\to 0}\int_{1+\epsilon'}^{3} \frac{1}{x-1}dx$$

Figura 22
Gráfica del ejercicio 3



Esta integral se resuelve haciendo la sustitución *u=x-1* para dar como resultado

$$= \lim_{\epsilon \to 0} [ln|1 - \epsilon - 1| - ln(0)] + \lim_{\epsilon' \to 0} \left[ln|3 - 1| - ln\left|1 + \epsilon' - 1\right|\right]$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} [ln| - \epsilon| - ln(0)] + \lim_{\epsilon' \to 0} \left[ln|2| - ln\left|\epsilon'\right|\right]$$

En este caso en particular, el área no se puede calcular, ya que los límites no existen y se dice que la integral no converge.

Ejercicio 4

$$Calcular \int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2}$$

Como se puede observar, la función se vuelve infinita en *x=2* que está dentro del intervalo de integración. Se aplica entonces el caso 2.

$$\int_0^4 \frac{1}{(x-2)^2}dx = \lim_{\in\to 0}\int_0^{2-\in}\frac{1}{(x-2)^2}dx + \lim_{\in'\to 0}\int_{2+\in'}^{4}\frac{1}{(x-2)^2}dx \quad sea\ u = x-2 \quad du = dx$$

$$= \lim_{\in\to 0}\int_0^{2-\in}\frac{1}{u^2}du + \lim_{\in'\to 0}\int_{2+\in'}^{4}\frac{1}{u^2}du = \lim_{\in\to 0}\left|-\frac{1}{u}\right|_0^{2-\in} + \lim_{\in'\to 0}\left|-\frac{1}{u}\right|_{2+\in}^{4}$$

$$= \lim_{\in\to 0}\left|-\frac{1}{x-2}\right|_0^{2-\in} + \lim_{\in'\to 0}\left|-\frac{1}{x-2}\right|_{2+\in}^{4}$$

$$= \lim_{\in\to 0}\left[-\frac{1}{2-\in-2}-\left(-\frac{1}{0-2}\right)\right] + \lim_{\in'\to 0}\left[-\frac{1}{4-2}-\left(-\frac{1}{2+\in-2}\right)\right]$$

$$= \lim_{\in\to 0}\left[\frac{1}{\in}-\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \lim_{\in'\to 0}\left[-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{\in}\right)\right]$$

En este punto se puede observar que la integral no tiene sentido ya que los límites son infinitos.

Ejercicios propuestos

1.	$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$	$R: \frac{\pi}{2}$
2.	$\int_{100}^\infty e^x dx$	$R: La\ integral\ diverge$
3.	$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.00001}}$	$R: 100000$
4.	$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$	$R: \frac{3}{2}$
5.	$\int_3^\infty x\ lnx\ dx$	$R: La\ integral\ diverge$

4.3 Volúmenes

Otra de las muchas aplicaciones que tiene el tema de las integrales es el cálculo de volúmenes que se generan al girar una figura alrededor de uno de los ejes coordenados tal como se ve en las figuras siguientes:

Tabla 4
Volúmenes generados por rotación de figuras planas comunes

Figura plana a rotar alrededor del eje	Volumen generado
①	
②	
③	

4.3.1 Método de discos

Se puede calcular el volumen generado al girar el área bajo la curva de una función cualquiera *f(x)* como el de la figura 23 alrededor de un eje cualquiera (en este caso el eje x) usando el caso ② de la Tabla 12, en donde la figura generadora es un rectángulo diferencial, cuya área diferencial es ydx y el volumen generado es un cilindro diferencial cuyo volumen es

$$dV = (\acute{A}rea\ del\ cilindro\ diferencial)(altura)$$

$$dV = (\pi y^2)(dx)$$

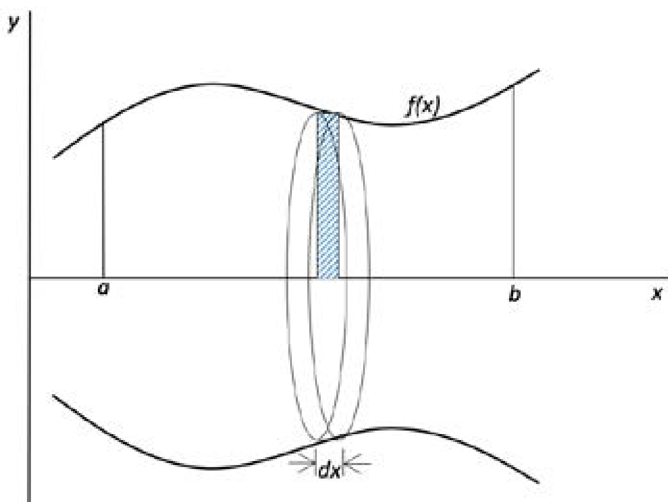
Con el objeto de manejar una sola variable dentro del integral, se reemplaza la y por la función,

$$dV = \left[\pi f_{(x)}^2\right](dx)$$

El siguiente paso es integrar a ambos lados de la ecuación, aplicando las técnicas aprendidas,

$$\int_a^b dV = \pi \int_a^b f_{(x)}^2 dx$$

Figura 23
Disco diferencial formado al rotar el elemento del área diferencial



Ejercicio 1

Encontrar el volumen que se genera al girar el área bajo la curva $x=y^2$ alrededor del eje x en [0,4]

Cálculo del volumen del cilindro diferencial:

$$dV = Adx = \left[\pi f_{(x)}^2\right](dx)$$

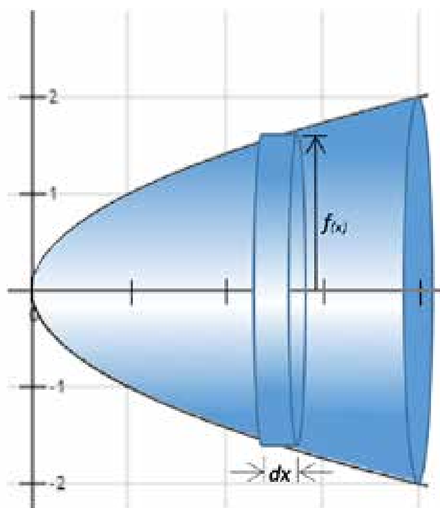
Despejando y de la función dada:

$$y = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad dV = \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx$$

Integrando

$$V = \int_0^4 \pi x dx = \pi \left|\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = 8\pi\ u^3$$

Figura 24
Gráfica del ejercicio 1



Ejercicio 2

Encontrar el volumen que se genera al girar el área entre la curva *$y=x^2$, la recta horizontal $y=4$* y el eje *y* alrededor del eje *y.*

En este caso es mejor trabajar con cilindros diferenciales horizontales como en la figura 25. El volumen del cilindro diferencial será:

$$dV = \pi x^2 dy$$

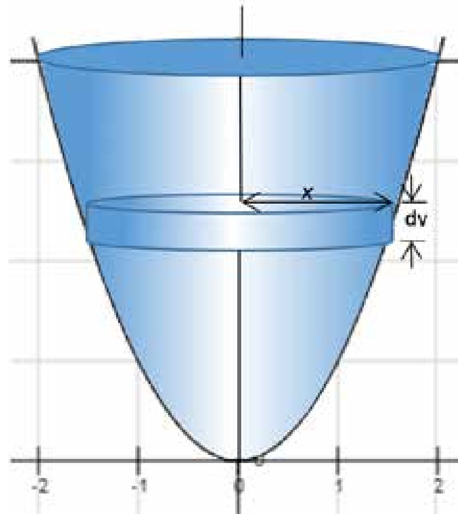
El barrido del cilindro deferencial es entre 0 y 4. Integrando entonces en ese intervalo se tiene:

$$V = \int_0^4 \pi x^2 dy$$

Poniendo todo el integral en función de y

$$V = \int_0^4 \pi y dy = \pi \left|\frac{y^2}{2}\right| \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix} = \frac{\pi}{2}[16] = 8\pi\ u^3$$

Figura 25
Gráfica del ejercicio 2



Ejercicio 3

Encontrar el volumen que se general al girar el área encerrada entre las la curvas $x=y^2$, la recta vertical $x=3$ alrededor del eje $x=3$

$$dV = \pi(3 - x)^2 dy$$

$$dV = \pi(3 - y^2)^2 dy$$

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (3 - y^2)^2 dy$$

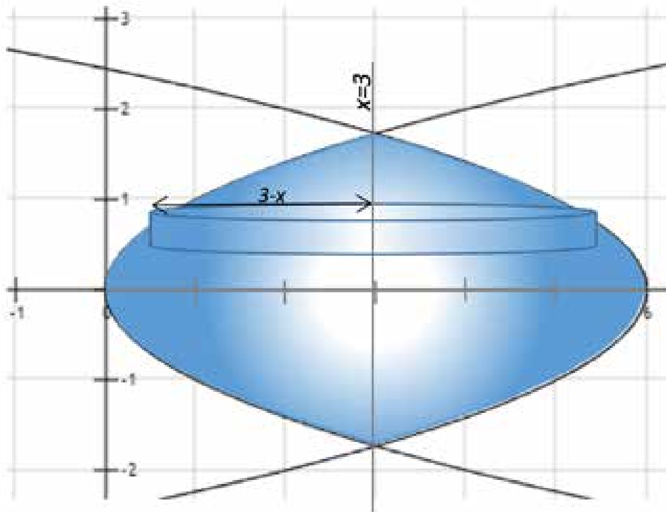
Note que los límites del integral se obtuvieron al reemplazar el valor de *x=3* en la función para obtener *y*.

El 2 delante del integral se hace para tomar en cuenta la parte bajo el eje *x*, ya que los límites del integral solo toman en cuenta la parte superior de la figura.

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (9 - 6y^2 + y^4) dy = 2\pi \left| 9y - 6\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right|_0^{\sqrt{3}} = 2\pi \left[9\sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3}\right)^3 + \frac{\left(\sqrt{3}\right)^5}{5} \right]$$

$$= \frac{48}{5}\sqrt{3}\pi\, u^3$$

Figura 26
Gráfica del ejercicio 3



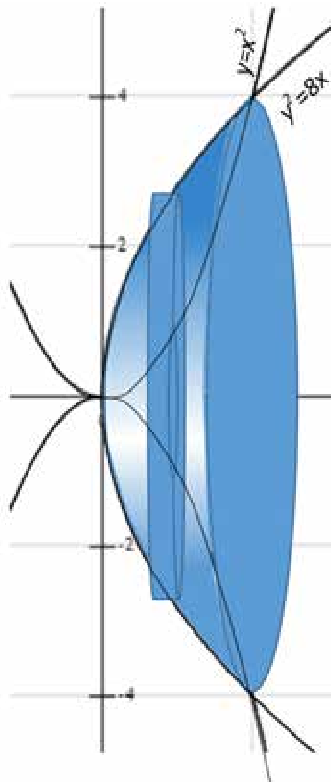
4.3.2 Método de arandelas

En ocasiones se necesita calcular el volumen de un sólido hueco generado por la rotación del área entre dos curvas alrededor de un eje.

Ejercicio 1

Encontrar el volumen del sólido que se genera por la rotación del área que se encuentra entre las funciones $y=x^2$ y $y^2=8x$.

Figura 27
Gráfica del ejercicio 1



Como se aprecia en la Figura 27, la arandela generadora, la arandela generadora tiene como diámetro exterior el valor de la función $y^2=8x$ y como diámetro interior, el valor de la función $y=x^2$ y el volumen de esa arandela diferencial es:

$$dV = Adx = \pi\left(r_{ext}^2 — r_{int}^2\right)dx = \pi\left[\left(\sqrt{8x}\right)^2 — (x^2)^2\right]dx = \pi(8x — x^4)dx$$

Los puntos de intersección de las dos curvas son (0,0) y (2,4). El volumen total del cuerpo se obtiene integrando la arandela diferencial en [0,2].

$$V = \pi\int_0^2 (8x — x^4)dx = 8\pi\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^2 — \pi\left|\frac{x^5}{5}\right|_0^2 = 4\pi(2^2) — \frac{\pi}{5}(2^5) = 16\pi — \frac{32\pi}{5} = \frac{48\pi}{5}\ u^3$$

4.3.3 Método de cilindros diferenciales

Otro método para calcular volúmenes de revolución es el de cilindros diferenciales, útiles sobre todo en casos en donde los métodos anteriores no funcionan.

Este método semeja a las cortezas que rodean el tronco de un árbol, o las que recubren un cebolla, de tal manera que al sumarlas todas hacen el tronco completo o la cebolla completa.

Ejercicio 1

Encontrar el volumen de la esfera de la figura 28 por el método de cilindros diferenciales.

La ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = 4$$

El volumen del cilindro diferencial que genera la esfera es:

$$dV = 2\pi rhe$$

Siendo $2\pi r$ el perímetro del cilindro, h la altura del cilindro y e el espesor de su pared.

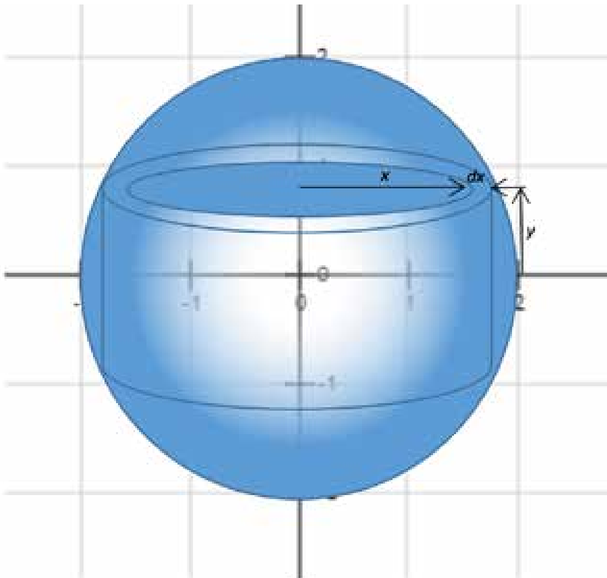
En este caso, r es x, h es $2y$, y e es dx. Reemplazando se tiene:

$$dV = 2\pi x(2y)dx$$

Poniendo el valor de y en función de x e integrando para obtener el volumen total se tiene

$$V = \int_0^2 2\pi x\left(2\sqrt{4-x^2}\right)dx = 4\pi\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx$$

Figura 28
Gráfica del ejercicio 1



Usando sustitución de variable, haciendo $u=4-x^2$ $du=-2xdx$

Los nuevos límites serán: para $x=0$ $u=4$, para $x=2$ $u=0$

$$V = 4\pi \int_4^0 \left(-\frac{1}{2}u^{1/2}\right) du = -2\pi \left| \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_4^0 = -\frac{4\pi}{3}\left[-(4)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{32}{3}\pi\, u^3$$

No confundir en la respuesta u^3 son unidades cúbicas que no tiene nada que ver con la u de la variable usada previamente para la sustitución en la integral.

El estudiante también puede comprobar la respuesta usando la fórmula para calcular el volumen de una esfera, misma que la puede encontrar en cualquier libro de geometría básica.

Ejercicio 2

Resolver el Ejercicio 1 de la sección anterior usando cilindros diferenciales.

En este caso, el volumen del cilindro diferencial es

$$dV = 2\pi y(x_2 - x_1)dy$$

Siendo:

y el radio
$x_2 - x_1$ la altura
dy el espesor de la pared del cilindro diferencial

$$x_2 = \sqrt{y} \textit{ obtenido de la parábola vertical}$$

$$x_1 = \frac{y^2}{8} \textit{ obtenido de la parábola horizontal}$$

Reemplazando e integrando se tiene

$$V = \int_0^4 2\pi y\left(\sqrt{y} - \frac{y^2}{8}\right) dy = 2\pi \int_0^4 \left(y^{3/2} - \frac{y^3}{8}\right) dy$$

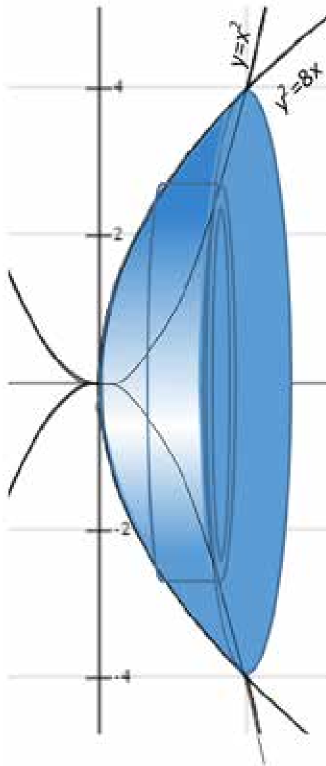
$$= 2\pi\left[\int_0^4 y^{3/2}dy — \int_0^4 \frac{y^3}{8}dy\right]$$

$$= 2\pi\left[\left|\frac{y^{5/2}}{5/2}\right|\begin{matrix}4\\0\end{matrix} — \frac{1}{8}\left|\frac{y^4}{4}\right|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right]$$

$$= 2\pi\left[\frac{2}{5}4^{5/2} — \frac{1}{32}4^4\right] = \frac{48\pi}{5}\,u^3$$

Que es la misma respuesta del ejercicio 1, como debería ser.

Figura 29
Gráfica del ejercicio 2



Ejercicios propuestos para las secciones 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3

1.	Calcule el volumen de una esfera de radio r usando el método de discos.	$R: \frac{4}{3}\pi r^3$
2.	Calcule el volumen de un cono de radio *r* y altura *h*	$R: \frac{\pi}{3} r^2 h$
3.	Calcule el volumen generado por una elipse horizontal con semieje mayor *a* y semieje menor *b* al rotar alrededor del eje *x*.	$R: \frac{4}{3}\pi ab^2$
4.	Encontrar el volumen del sólido generado al rotar el área comprendida entre las curvas $y=x$ y $y=x^2$ alrededor del eje x.	$R: \frac{2}{15}\pi\, u^3$
5.	Encontrar el volumen del sólido generado en el ejercicio 4 al girar alrededor de la recta $y=2$	$R: \frac{8}{15}\pi\, u^3$
6.	Calcular el volumen del sólido generado al gira la región entre las curvas $y=x^3+x^2+2x+1$; $x=1$; los ejes *x* y *y* alrededor del eje $x=2$	$R: \frac{71}{10}\pi\, u^3$
7.	Hallar el volumen que se genera al rotar el área comprendida entre la parábola $y=4x-x^2$ y el eje *x* con respecto a la recta $y=6$	$R: \frac{1408}{15}\pi u$
8.	Encontrar el volumen del sólido que se genera al girar la región comprendida entre $y=e^x$; $y=1$; $x=1$ alrededor del eje *x*.	$R: 6.8943\, u^3$
9.	Resolver el problema 1 de esta sección usando el método de cilindros huecos diferenciales o casquetes cilíndricos.	
10.	Resolver el problema 2 de esta sección usando el método de cilindros huecos diferenciales o casquetes cilíndricos.	
11.	Hallar el volumen del toroide que se genera al girar la curva $(x-3)^2+y^2=4$ alrededor del eje *x*.	$R: 12\pi^2\, u^3$
12.	Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región comprendida entre las curvas $y = 8x^2$ y $y = \sqrt{8x}$ alrededor del eje *x*. Use el método de cilindros huecos diferenciales o casquetes cilíndricos.	$R: \frac{48}{5}\pi\, u^3$
13.	Use el método de cilindros diferenciales huecos o casquetes para encontrar el volumen del sólido generado al rotar el área bajo la curva $y^2=x^3$ alrededor del eje *x* en [0,3].	$R: \frac{81}{4}\pi\, u^3$
14.	Use el método más apropiado para calcular el volumen que se genera al girar el área limitada por las curvas $y=2-x^4$; $y=1$ alrededor del eje *x*.	$R: \frac{208}{45}\pi$
15.	Use el método más apropiado para calcular el volumen que se genera al girar el área bajo la curva $f(x)=-x^3+4x^2-3x+1$ alrededor del eje *x*. Si la figura se hiciera girar 90° a la derecha, que forma tendría.	$R: \frac{849}{70}\pi\, u^3$

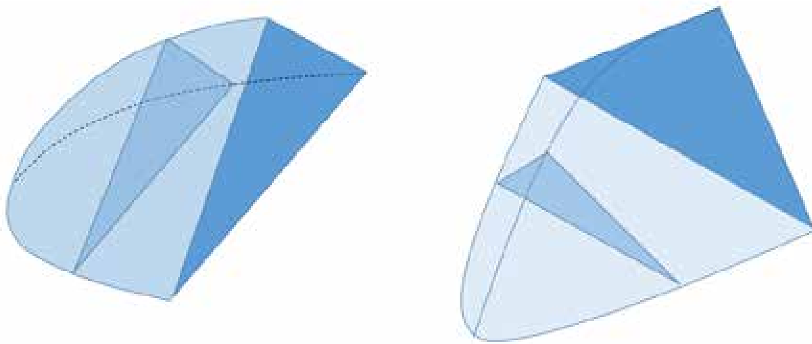
4.3.4 Volúmenes de sólidos de sección transversal recta conocida

Usando integrales, también es posible calcular el volumen de sólidos que no se generan por rotación como los vistos hasta ahora, pero cuya sección recta es conocida. Para ilustrar mejor esta sección se hará directamente un ejemplo.

Ejercicio 1

Calcular el volumen de un cuerpo cuya base es una parábola cuya ecuación de $y=x^2$ en [0,3]. La altura *z en* cada punto es igual al valor de *y.*

Figura 30
Vistas desde diferentes ángulos del ejercicio 1



La figura 30 incluye dos vistas que ayudan a entender mejor la forma del cuerpo planteada en el problema. Note que si se hace un corte perpendicular a la cara plana del fondo y paralela a la cara triangular del costado, esa sección siempre va a tener forma triangular como se aprecia en la figura 31. De ahí el nombre de "Volúmenes de sólidos de sección transversal recta conocida".

El procedimiento es el mismo que se ha visto antes. Se dibuja un elemento diferencial de volumen que en este caso es un triángulo diferencial cuya base es dos veces el valor de la función ($y=x^2$) y la altura es

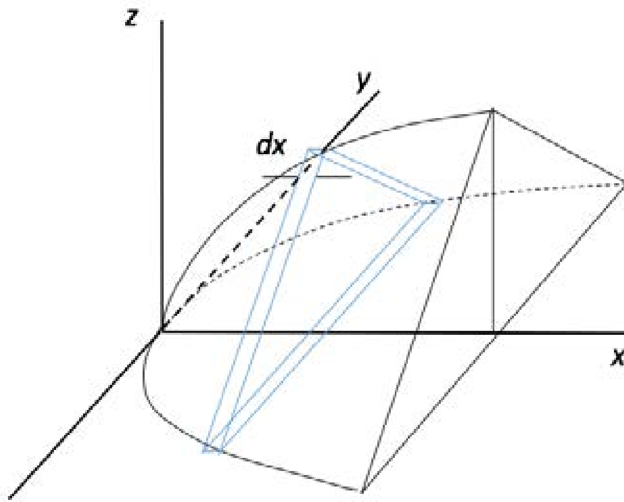
el valor de la función como dice el enunciado del problema y el espesor es *dx*.

$$dV = (\acute{A}rea\ del\ triángulo)(espesor)$$

$$dV = \frac{2(x^2)(x^2)}{2}dx \quad \rightarrow \quad V = \int_0^3 x^4 dx = \left|\frac{x^5}{5}\right|_0^5 = \frac{1}{5}(5^5) = 625\ u^3$$

Se deja al estudiante la comparación de este valor con el obtenido por el cálculo del semiparaboloide (mitad del paraboloide) resultado de la rotación de $y=x^2$ alrededor del eje x.

Figura 31
Elemento diferencial del ejercicio 1



Ejercicio 2

Encontrar el volumen del cuerpo cuya base es un círculo de radio r=2 y cuya sección recta perpendicular a la base es siempre un triángulo de altura h=5.

(Ayres, 1989, p. 180)

Ecuación de la circunferencia o base $x^2+y^2=4$

Altura de cualquier triángulo de cualquier sección recta $y=5$

Volumen de una sección diferencial recta cualquiera

$$dV = (\acute{A}rea\ del\ tri\acute{a}ngulo)(espesor)$$

$$dV = \left(\frac{1}{2} base\ x\ altura\right)(espesor)$$

$$dV = \left[\frac{1}{2}(2y)(5)\right]dx$$

$$V = \int_{-2}^{2} \frac{1}{2} 2\sqrt{4-x^2}\,(5)dx = 5\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$$

La integral se resuelve por sustitución trigonométrica, haciendo la sustitución $x=2sen\theta$ y $du=2cos\theta d\theta$ y haciendo de una vez el cambio de límites en el integral:

Para $x=-2\ sen\theta=-1 \rightarrow \theta=-\pi/2$; para $x=2\ sen\theta=1 \rightarrow \theta=\pi/2$

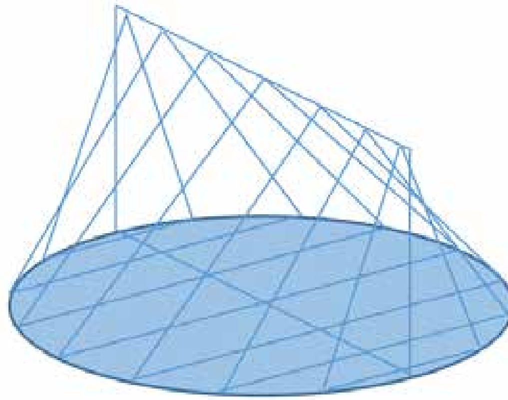
$$V = 5\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4 - 4sen^2\theta}(2cos\theta)d\theta = 5\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2cos\theta)\sqrt{4(1 - sen^2\theta)}\,d\theta$$

$$= 5\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2cos\theta)\sqrt{4cos^2\theta}d\theta = 20\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^2\theta d\theta$$

$$= 20\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + cos2\theta)d\theta = 10\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta + 10\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos2\theta d\theta$$

$$= 10\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) + 10\left(\frac{sen2(\pi/2) - sen2(-\pi/2)}{2}\right) = 10\pi\ u^3$$

Figura 32
Gráfica del ejercicio 2



Ejercicio 3

Se tiene un cilindro circular recto cerrado en su base inferior y abierto en su base superior, inclinado de tal manera que el líquido que contiene ha salido por su base superior hasta que el nivel en la base inferior alcanza la mitad de la altura como se muestra en la figura 33. La longitud del cilindro es 10 pies y el diámetro 4 pies.

Figura 33
Gráfica del ejercicio 3

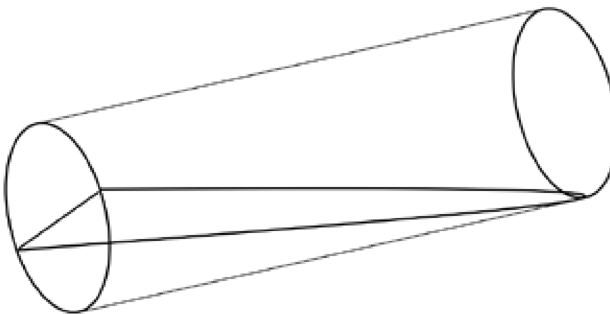
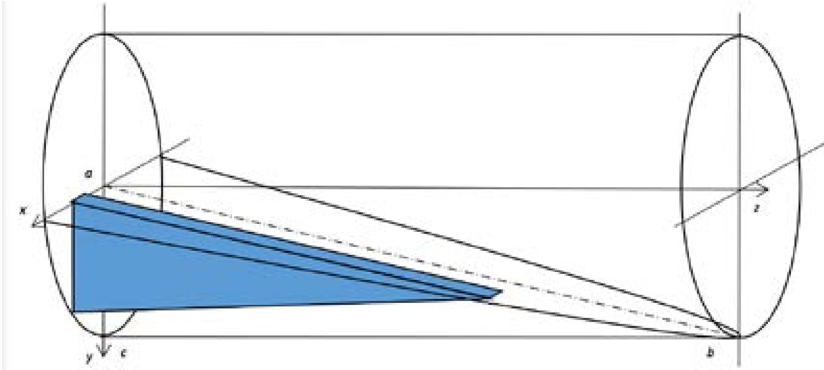


Figura 34
Elemento diferencial del ejercicio 3



Ya que las bases son perpendiculares a la cara lateral del cilindro, se pueden construir rectángulos diferenciales paralelos al eje de simetría del cilindro, como muestra la figura 34.

$$dV = (\acute{A}rea\ del\ tri\acute{a}ngulo\ rect\acute{a}ngulo)(espesor)$$

$$dV = \left(\frac{yz}{2}\right) dx$$

El cateto menor se obtiene de la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 4^2 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{4 - x^2}$$

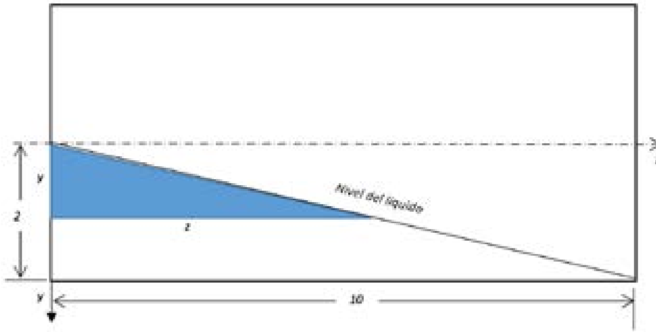
El cateto mayor se obtiene haciendo semejanza de triángulos.

$$\frac{10}{2} = \frac{z}{y} \quad \rightarrow \quad z = 5y \quad \rightarrow \quad z = 5\sqrt{4 - x^2}$$

$$dV = \left[\frac{(\sqrt{4 - x^2})(5\sqrt{4 - x^2})}{2}\right] dx \quad \rightarrow \quad V = 2\int_0^2 \left[\frac{(\sqrt{4 - x^2})(5\sqrt{4 - x^2})}{2}\right] dx$$

$$V = 5\int_0^2 (4 - x^2)\, dx = 20|x|\,\begin{matrix}2\\0\end{matrix} - 5\left|\frac{x^3}{3}\right|\begin{matrix}2\\0\end{matrix} = 40 - \frac{40}{3} = \frac{80}{3} \approx 26.67u^3$$

Figura 35
Vista en dos dimensiones del elemento diferencial del ejercicio 3



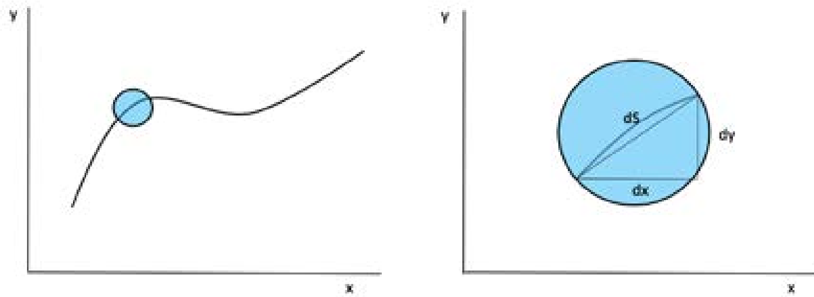
Ejercicios propuestos a la sección 4.3.4

1.- Calcular el volumen de un cono cortado por la mitad por un plano que pasa por su eje de simetría. La base del cono es un semicírculo de radio *"a"* y la altura del cono es *"h"*.	$R: \frac{\pi}{6} a^2 h \ u^3$
2.- Hallar el volumen de un sólido de base circular de radio *r=4*, sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al diámetro es un cuadrado	$R: \frac{1024}{3} u^3$
3.- Encontrar el volumen de un sólido cuya base es la región entre una arcada de *y=senx y el eje x*. Las secciones transversales son triángulos equiláteros montados sobre la base	$R: \frac{\sqrt{3}}{8} \pi \, u^3$
4.- Encontrar el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado *"b"* y altura *"h"*.	$R: \frac{b^2 h}{3} \ u^3$
5.- Cálculo del volumen del sólido que se genera al intersecar dos cilindros perpendicularmente.	$R: \frac{16}{3} r^3 \ u^3$

4.4 Longitud de arco

Suponga una curva cualquiera como la de la figura 27 que puede ser representada por una función *f(x)*, y se quiere calcular su longitud. El procedimiento es como se ha hecho anteriormente, se divide la curva en tramos muy pequeños como el de la ampliación a la derecha, de tal manera que la curvatura se aproxima a tramos de rectas. La longitud del diferencial *ds* se puede calcular por Pitágoras.

Figura 36
Longitud de una curva



$$(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Dividiendo y multiplicando a la vez la parte derecha de la ecuación por $(dx)^2$ se tiene:

$$(dS)^2 = \left[\frac{(dx)^2}{(dx)^2} + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right](dx)^2$$

Extrayendo raíz a ambos lados de la ecuación

$$dS = \sqrt{\left[\frac{(dx)^2}{(dx)^2} + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right](dx)^2} = \sqrt{\frac{(dx)^2}{(dx)^2} + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\ dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

Integrando se tiene

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

Observe que *dy/dx* es la derivada de la función.

Siguiendo el mismo procedimiento se puede llegar a una variante de la fórmula anterior que es

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

Válida para casos en donde es más conveniente trabajar con diferenciales en *y*.

Se deja al estudiante la demostración de esta fórmula.

Ejercicio 1

Calcular la longitud del arco de la función $f(x)=x^2$ en [0,4]

$$S = \int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\mathbf{2}}}\ dx$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Reemplazando

$$S = \int_0^4 \sqrt{1 + (2x)^{\mathbf{2}}}\,dx \int_0^4 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx \quad sea\ \ 2x = tgt \quad \rightarrow \quad x = \frac{tgt}{2} \quad dx = \frac{sec^2 tdt}{2}$$

El cambio de límites estará dado por:

$$t = arctg(2x), luego\ para\ x = 0, t = arctg(0) = 0\ rad;\ \ para\ x = 4, t = arctg(8) = 1.45$$

$$= \int_0^{1.45} \sqrt{1 + \frac{4tg^2t}{4}} \left(\frac{sec^2tdt}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{1.45} \sqrt{1 + tg^2t}\, sec^2tdt = \frac{1}{2}\int_0^{1.45} sec^3tdt$$

Esta integral se la resolvió anteriormente por el método de integración por partes en la sección 2.4 Ejercicio 3

$$\frac{1}{2}\int_0^{1.45} sec^3tdt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}|sect\ tgt|\begin{matrix}1.45\\0\end{matrix} + \frac{1}{2}\left|ln|sect + tgt|\right|\begin{matrix}1.45\\0\end{matrix}\right]$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{1.45} sec^3tdt = \frac{1}{4}\left[\left(\sec(1.45)\text{tg}(1.45) — \sec(0)\, tg(0)\right)\right.$$
$$\left. + ln|sec(1.45) + tg(1.45)| — ln|sec(0) + tg(0)|\right]$$

$$= \frac{1}{4}[(68.36 — 0) + ln(16.54) — ln(1)] \approx 17.79$$

Ejercicio 2

Calcule el perímetro de una circunferencia de radio *“r”*.

Por simplicidad, se colocarán los ejes de las coordenadas x y y en el origen de la circunferencia, de tal manera que la ecuación de la circunferencia sea $x^2+y^2=r^2$.

Aplicando la fórmula para cálculo de longitud del arco del primer cuadrante se tiene:

$$S = \int_0^{r} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Aplicando derivadas implícitas para derivar la función se tiene:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = —\frac{x}{y}$$

Reemplazando en la integral

$$S = \int_0^r \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2}\, dx = \int_0^r \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}\, dx$$

Reemplazando y en función de x

$$S = \int_0^r \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}\, dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = r \left| arc\ sen\left(\frac{x}{r}\right) \right|_0^r$$

$$S = r\left[arc\ sen\left(\frac{r}{r}\right) - arc\ sen(0)\right] = r\frac{\pi}{2}$$

Ya que el ejercicio se resolvió solo para el primer cuadrante, la longitud total del perímetro de la circunferencia será

$$S = 4\left(r\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi r$$

Ejercicios propuestos sección 4.4

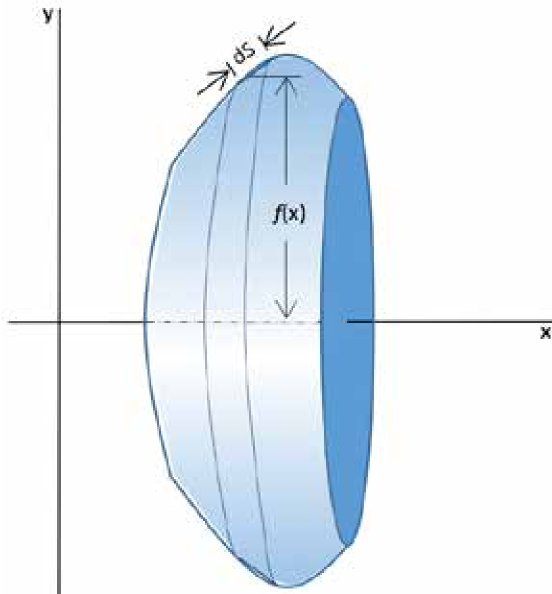
1. Encontrar la longitud de la curva $y = \frac{1}{2}x + 3$ en [0,4]. Compruebe este resultado usando los conocimientos adquiridos en Geometría Analítica	
2. Calcular la longitud del arco de circunferencia de radio 3 que forma un ángulo de 60° con el eje x positivo. Comprobar la respuesta usando la fórmula para cálculo del arco de circunferencia conociendo ángulo y radio.	
3. Hallar la longitud del arco de la curva $y = \sqrt{x^3}$ en [0,5]	$R: \frac{335}{27}$
4. Calcular la longitud del arco formado en [1,2] de la función $y = \frac{x^4}{8} + \frac{x^{-2}}{4}$	$R: \frac{33}{16}$
5. Hallar la longitud del arco de curva formado en [-3,1] de $y=x^3+3x^2$. Use métodos numéricos si fuera necesario.	$R: 13.037$

4.5 Superficies de revolución

En ocasiones se necesita calcular el área de la superficie que envuelve un cuerpo. Si el cuerpo es un sólido generado por la rotación alrededor de un eje, la superficie en cuestión se podrá calcular con el método que se verá a continuación.

Siguiendo igual procedimiento que el usado para el cálculo de la longitud de arco, en este caso se escoge un elemento de arco y se lo hace rotar alrededor del mismo eje de revolución del sólido. El resultado es un tronco de cono diferencial hueco.

Figura 37
Superficie de revolución



El área lateral del tronco de cono diferencial es:

$$dA = 2\pi r ds$$

Note que el radio es medido en la parte central de "*ds*".

Reemplazando *ds* calculado ya en la sección 4.4 y *r* por el valor de la función en el punto medio citado se tiene

$$dA = 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

El área total se la obtiene integrando el diferencial entre los límites que se deseen [a,b]

$$A_x = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

En donde el subíndice *x* significa que el eje de revolución es el eje x. En forma similar se puede obtener la fórmula para el cálculo de la superficie general alrededor del eje *y*.

$$A_y = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

(Granville, 2009, p. 337).

Ejercicio 1

Encontrar el área de la superficie que envuelve a una esfera de radio *"r"*.

$$A_x = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$Sea\ x^2 + y^2 = r^2$ la ecuación que describe la forma de la figura que va a rotar alrededor del eje *x*.

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Reemplazando

$$A_x = \int_0^r 2\pi\sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx$$

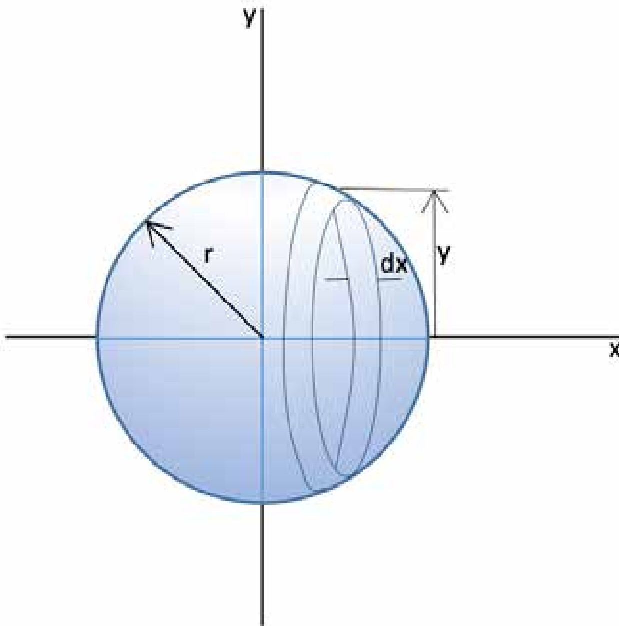
$$A_x = \int_0^r 2\pi\sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$A_x = \int_0^r 2\pi r\, dx = 2\pi r|x|\begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix} = 2\pi r^2$$

El área total será el doble de la calculada, ya que la integración fue solo para el lado derecho.

$$A_T = 4\pi r^2$$

Figura 38
Gráfica del ejercicio 1



Ejercicio 2

Encontrar el área del cuerpo que se genera al girar el área entre la curva *y=x^2, la recta horizontal y=4* y el eje y alrededor del eje y del Ejercicio 2, sección 4.3.1.

En este caso es mejor trabajar con cilindros diferenciales horizontales como en la figura 25. El área del cilindro diferencial será:

$$A_y = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

El barrido del cilindro deferencial es entre 0 y 4. Integrando entonces en ese intervalo se tiene:

$$A_y = \int_0^4 2\pi\sqrt{y} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\ dy$$

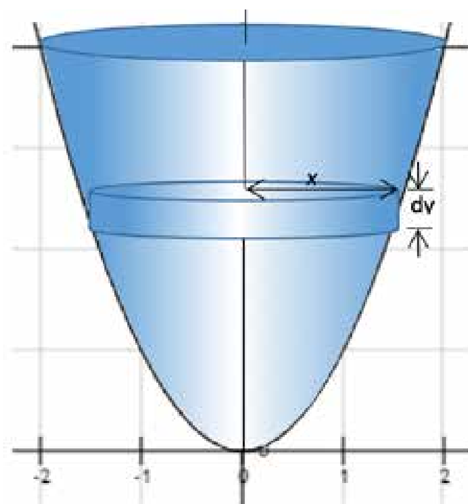
$$A_y = \int_0^4 2\pi\sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\ dy$$

$$A_y = \int_0^4 2\pi\sqrt{y} \sqrt{\frac{4y+1}{4y}}\ dy = A_y = 2\pi \int_0^4 \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{y}} \sqrt{4y+1}\, dy = \pi \int_0^4 \sqrt{4y+1}\, dy$$

Usando sustitución de variables, la integral anterior se convierte en

$$A_y = \frac{\pi}{4}\int_0^4 u^{1/2} du = \frac{\pi}{4}\left|\frac{u^{3/2}}{3/2}\right|\begin{matrix}4\\0\end{matrix} = \frac{\pi}{6}\left|(4y+1)^{3/2}\right|\begin{matrix}4\\0\end{matrix} = \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} — 1^{3/2}\right) \approx 36.17\ u^2$$

Figura 39
Gráfica del ejercicio 2



Ejercicios propuestos sección 4.5

1. Encontrar el área de la superficie que envuelve el sólido generado al rotar la curva $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ alrededor del eje *x*.	$R: 85.91\ u^2$
2. Hallar el área de la superficie generada en la rotación de $y=mx$ alrededor del eje *x* en [0,2]. ¿Qué figura se obtiene?	$R: 4\pi m\sqrt{1+m^2}\ u^2$
3. Hallar el área de la superficie generada en la rotación de $y=mx+b$ alrededor del eje *x* [0,2]. ¿Qué figura se obtiene?	$R: 4\pi(m+b)\sqrt{1+m^2}\ u^2$
4. Hallar el área de la superficie de revolución que se forma al rotar la curva $8y^2=x^2-x^4$ sobre el eje *x*.	$R: \frac{\pi}{2}\ u^2$
5. Calcular el área de la superficie que se forma al girar la curva $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ alrededor del eje *x* en [-2,2]	$R: 98.30\ u^2$

4.6 Aplicaciones a la Física

Una de las aplicaciones más importantes y de hecho, la razón de la existencia del Cálculo como ciencia fue justamente para la solución de algunos problemas de Física en particular.

4.6.1 Trabajo

En Física se estudió que el trabajo que una fuerza realiza sobre un cuerpo está dado por la expresión:

$$Trabajo\ (T) = Fuerza\ (F)\ x\ Distancia\ (d)$$

En los problemas que hasta ahora se resolvieron, se consideró constante la fuerza, entonces el trabajo era simplemente la multiplicación de ambas cantidades, pero que sucede si la fuerza no es constante, entonces el trabajo sería la suma de todos los pequeños trabajos realizados sobre una distancia pequeña en donde la fuerza fue constante y el cálculo estaría dado por

$$T = \sum_{i=1}^{n} F_{(x_i)} \Delta x_i$$

Si las distancias se las divide en valores muy pequeños, tanto que tienden a cero, la expresión anterior se vuelve la ya conocida

$$T = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_{(x_i)} \Delta x_i = \int_a^b F_{(x)} dx$$

En donde es necesario encontrar una función que exprese la forma como varía la fuerza en función de la distancia recorrida por la fuerza.

Ejercicio 1

Para mantener estirado un resorte cuya longitud natural es 10 cm y se lo alarga hasta 15 cm se requiere una fuerza de 40 N. ¿Qué trabajo se requiere para alargarlo 3 cm más?

$$T = \int_a^b F_{(x)} dx$$

F(x) se obtiene aplicando la Ley de Hooke que dice que dentro de un cierto rango llamado rango de elasticidad o límite elástico, la fuerza necesaria para deformar un resorte es proporcional a la distancia que se ha deformado, que en forma matemática se la expresa de la siguiente manera:

$$F_{(x)} = kx$$

En donde *k* es la constante del resorte y se la obtiene despejando *k* de la ecuación anterior

$$k = \frac{F}{x} = \frac{40\ N}{(0.15 - 0.10)m} = 800\frac{N}{m}$$

Reemplazando los valores obtenidos en la expresión para el trabajo de un resorte se tiene

$$T = \int_{0.05}^{0.08} 800x dx = 800 \left|\frac{x^2}{2}\right|_{0.05}^{0.08} = 400(0.08^2 — 0.05^2) = 3.12\ Nm = 1.56\ J$$

Note que en los límites del integral van los valores de estiramiento que sufre el resorte desde su posición natural, es decir si el resorte mide 15 cm, quiere decir que se ha estirado 5 cm desde su longitud original y que si el resorte mide 18 cm, quiere decir que se ha estirado 8 cm desde su longitud natural.

Otra interpretación del Trabajo es el área bajo la curva Fuerza-Desplazamiento o Deformación

$$F_{(0.05)} = 800N(0.05m) = 40Nm$$

$$F_{(0.08)} = 800N(0.08m) = 64Nm$$

El área bajo la curva en este caso es un trapecio que está dada por

$$T = \left(\frac{B+b}{2}\right)h = \left(\frac{64+40}{2}\right)(0.03) = 1.56J$$

Figura 40
Gráfica del ejercicio 1

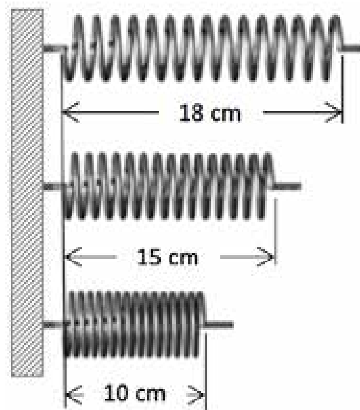
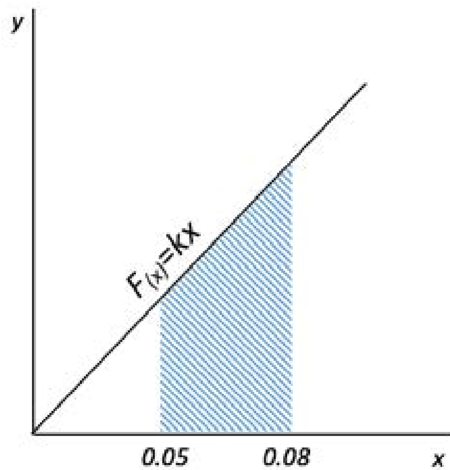
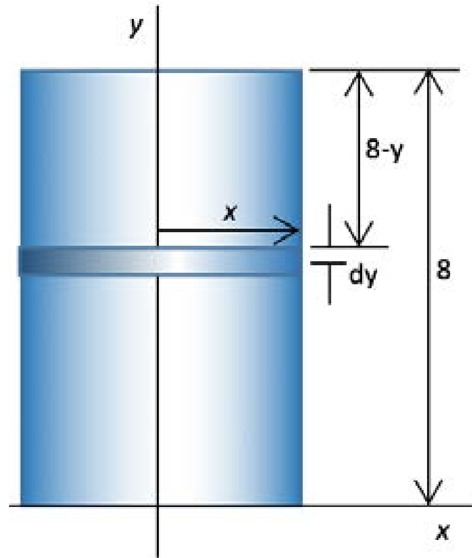


Figura 41
El trabajo es el área sombreda



Ejercicio 2

Figura 42
Gráfica del ejercicio 2



A un tanque de forma cilíndrica de 2m de radio y 8m de alto, lleno de agua, se le quiere sacar toda el agua por la parte superior bombeándola hacia afuera. Calcular el trabajo necesario para sacar el agua. (peso específico del agua $9800N/m^3$)

Peso del elemento diferencial de líquido

$$dP = mg = \gamma dV$$

El volumen del disco diferencial de líquido es

$$dV = \pi x^2 dy$$

$$dP = \gamma \pi x^2 dy$$

Siendo Υ es el peso específico del líquido

El trabajo está dado por la fuerza que hay que hacer para llevar ese elemento de líquido hasta la superficie.

$$dT = (\gamma\pi x^2 dy)(8 — y) = \gamma\pi x^2(8 — y)dy$$

$$T = \int_0^8 \gamma\pi x^2(8 — y)dy = \gamma\pi \int_0^8 x^2(8 — y)dy \quad como\ x = 2\ para\ todo\ y$$

$$T = \gamma\pi \int_0^8 2^2\,(8 —— y)dy = 4\gamma\pi \int_0^8 (8 — y)dy = 4\gamma\pi \left[\int_0^8 8dy — \int_0^8 ydy\right]$$

$$T = 4\gamma\pi \left[8|y|\begin{matrix}8\\0\end{matrix} — \left|\frac{y^2}{2}\right|\begin{matrix}8\\0\end{matrix}\right] = 4\gamma\pi(64 — 32) = 1'254.400\,J$$

Ejercicio 3

Resolver el ejercicio 2 para el caso de un tanque tronco-cónico cuyo radio de la base inferior es 1, el radio de la base superior es 2 y altura 8

Peso del elemento diferencial de líquido

$$dP = mg = \gamma dV$$

El volumen del disco diferencial de líquido es

$$dV = \pi x^2 dy$$

$$dP = \gamma\pi x^2 dy$$

Siendo Υ es el peso específico del líquido

El trabajo está dado por la fuerza que hay que hacer para llevar ese elemento de líquido hasta la superficie.

$$dT = (\gamma\pi x^2 dy)(8 - y) = \gamma\pi x^2(8 - y)dy$$

$$T = \int_0^8 \gamma\pi x^2(8 - y)dy = \gamma\pi \int_0^8 x^2(8 - y)dy$$

Se puede poner x en función de y deduciendo la ecuación de la recta que describe el lado vertical del cilindro, cuya pendiente se puede concluir fácilmente que es 8.

$$y\text{-}0 = 8(x - 1) \quad \rightarrow \quad y = 8x - 8 \quad \rightarrow \quad x = \frac{y+8}{8}$$

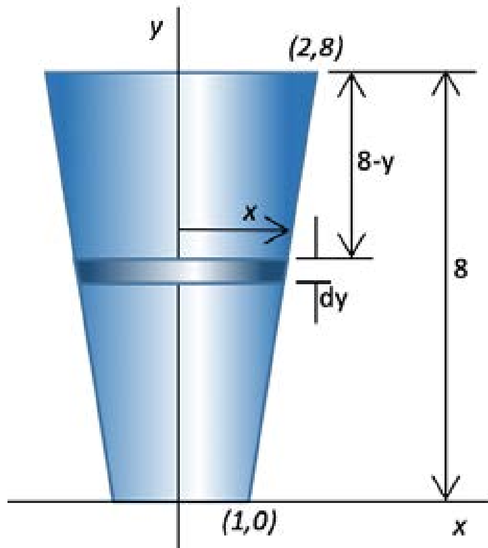
Reemplazando este valor en el integral

$$T = \gamma\pi \int_0^8 x^2(8-y)dy = \gamma\pi \int_0^8 \left(\frac{y+8}{8}\right)^2 (8-y)dy = \gamma\pi \int_0^8 \left(\frac{y^2+16y+64}{64}\right)(8-y)dy$$

$$= \frac{\gamma\pi}{64}\int_0^8 (8y^2 + 128y + 512 - y^3 - 16y^2 - 64y)dy = \frac{\gamma\pi}{64}\int_0^8 (-y^3 - 8y^2 + 64y + 512)dy$$

$$= \frac{\gamma\pi}{64}\left[-\left|\frac{y^4}{4}\right|_0^8 - 8\left|\frac{y^3}{3}\right|_0^8 + 64\left|\frac{y^2}{2}\right|_0^8 + 512|y|_0^8\right] = 1'806.206\, J$$

Figura 43
Gráfica del ejercicio 3



Ejercicios Propuestos sección 4.6.1

1. Se conoce que para estirar 1 cm un resorte de 12 cm de largo en estado natural, se requieren 80 N. Calcular el trabajo necesitado para estirarlo a) desde 12 a 15 cm b) desde 15 a 16 cm.

R: 2.8 J

2. Un tanque de forma cilíndrica de 5 m de diámetro y 8 m de profundidad está lleno de agua (1000 kp/m^3). Calcular el trabajo para bombear el agua hasta el borde superior de la cisterna.

R: 200000 π kp.m

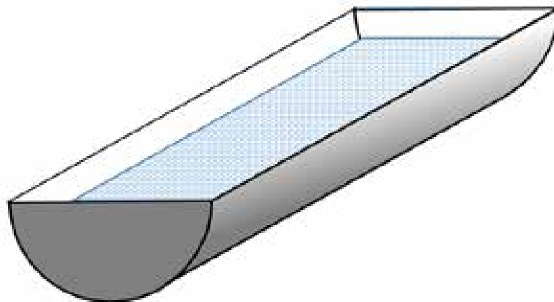
3. Si el tanque del problema 2 tiene agua hasta los 5 m de profundidad, calcule el trabajo para bombear el agua igualmente hasta el borde superior del tanque.

R: 171875 kp.m

4. Calcular el trabajo necesario para llevar agua hasta el extremo superior del depósito de la figura 44. El largo del tanque es de 50 p y el diámetro es 20 p, suponiendo que dicho recipiente se encuentra 7 pies lleno.

R: 1805.62 lb.p

Figura 44
Gráfica del problema 4



5.- Un tanque semiesférico está lleno de petróleo (800 kp/m^3). Calcular el trabajo necesario para llevar todo el petróleo hasta la superficie.

R: 800000π/3 kp.m

4.6.2 Fuerza ejercida por un líquido

De la observación diaria podemos darnos cuenta que los líquidos ejercen una fuerza sobre las paredes que lo contienen. Esa fuerza es igual al siguiente producto:

$$Fuerza\ (F) = \begin{pmatrix} Peso \\ específico \\ del\ líquido \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Área\ de\ la \\ superficie \\ sumergida \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Profundidad\ a\ la\ que \\ se\ encuentra\ el \\ centro\ geométrico \end{pmatrix}$$

Para ilustrar la aplicación de esta fórmula se va a resolver el siguiente ejercicio

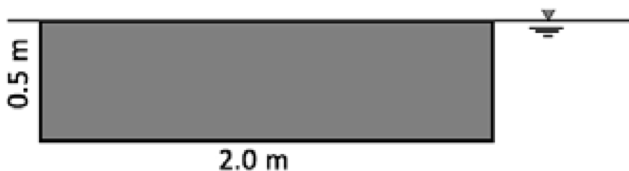
Ejercicio 1

Calcular la fuerza que ejerce el agua sobre la cara sumergida que se muestra en la figura 36.

$$F = 9800\frac{N}{m^3}(2x0.5)m^2(0.25m) = 2450N$$

El mismo cálculo se repetirá usando integrales para ilustrar el procedimiento, mismo que servirá para problmeas con áreas más complejas.

Figura 45
Gráfica del ejercicio 1



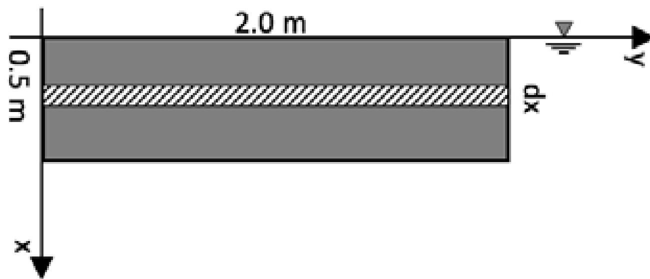
Aplicando la fórmula anterior al elemento de área y ubicando los ejes coordenados convenientemente

$$dF = 9800(2dx)(x)$$

$$F = \int_0^{0.5} 9800(2dx)(x) = 19600 \int_0^{0.5} xdx$$

$$= 19600 \left|\frac{x^2}{2}\right|_0^{0.5} = 2450N$$

Figura 46
Gráfica del ejercicio 1



Ejercicio 2

Calcular la fuerza ejercida por el agua sobre la cara sumergida del ejercicio anterior tomando en cuenta que la parte superior de ésta se encuentra 0.3 m por dejado de la superficie.

1er método

$$F = 9800 \frac{N}{m^3}(2x0.5)m^2(0.55m) = 5390N$$

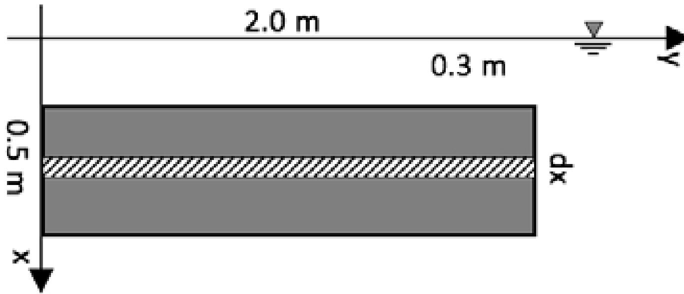
2do método

$$dF = 9800(2dx)(x)$$

$$F = \int_{0}^{0.5} 9800(2dx)(x) = 19600 \int_{0.3}^{0.8} xdx$$

$$= 19600 \left| \frac{x^2}{2} \right| \begin{matrix} 0.8 \\ 0.3 \end{matrix} = 5390N$$

Figura 47
Gráfica del ejercicio 2



Ejercicio 3

Encuentre la fuerza que ejerce el agua sobre la pared de una represa trapezoidal de 50 m de base mayor, 30 m de base menor y 20 m de altura. Suponga que el nivel del agua está 4 m por debajo del borde superior de la represa (Figura 38).

Ubicando los ejes coordenados como se muestra en la figura 48

$$dF = (9800)(2ydx)(x) = 9800yxdx \quad \rightarrow \quad F = \int_{0}^{16} 19600yxdx$$

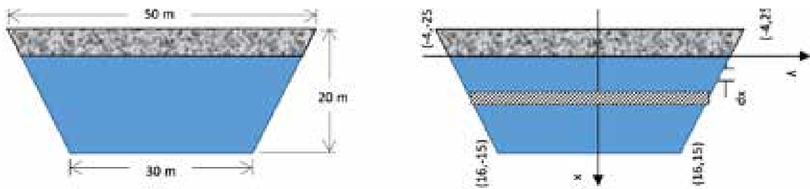
Para poner y en función de x se puede usar la ecuación de la recta, misma que se puede deducir usando los puntos (-4,25) y (16,15) se obtiene

$$y = -\frac{1}{2}x + 23$$

$$F = 19600\int_0^{16}\left(-\frac{1}{2}x + 23\right)xdx = 19600\int_0^{16}\left(-\frac{1}{2}x^2 + 23x\right)dx$$

$$= 19600\left[-\frac{1}{2}\left|\frac{x^3}{3}\right|\begin{matrix}16\\0\end{matrix} + 26\left|\frac{x^2}{2}\right|\begin{matrix}16\\0\end{matrix}\right] = 19600\left(-\frac{1}{6}16^3 + \frac{23}{2}16^2\right) = 44322133 = 4.43x10^7N$$

Figura 48
Gráfica del ejercicio 3

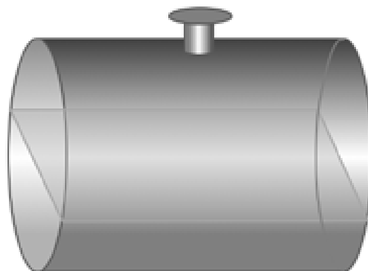


Ejercicios propuestos sección 4.6.2

1. Un tanque con forma de cilindro circular recto (Figura 49), con petróleo hasta la mitad de su altura descansa sobre el lado circular como se muestra. Las medidas del tanque son: 8 pies de diámetro y 24 pies de longitud. Determine la fuerza total ejercida por el fluido contra una de las caras circulares. (Peso específico del petróleo 50 lb/p^3)

R: 2133.33 lb

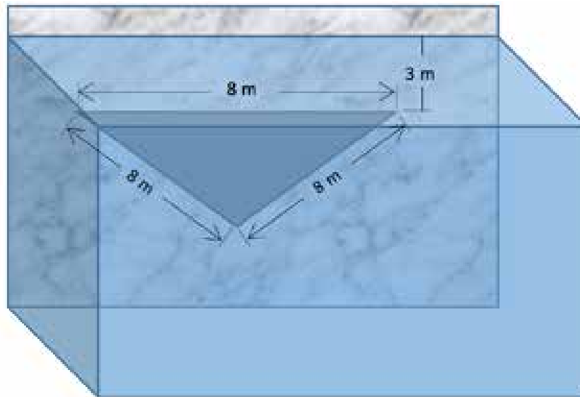
Figura 49
Gráfica del problema 1



2. Calcular la fuerza que ejerce el agua sobre la superficie triangular (Figura 42) sumergida, de lados 5 m, 5 m y 8 m, con el lado mayor estando paralelo a la superficie del líquido y situado a 3 m por debajo del nivel. ($\Upsilon H2O$=1000 kp/m^3)

R: 48000 kp

Figura 50
Gráfica del problema 2



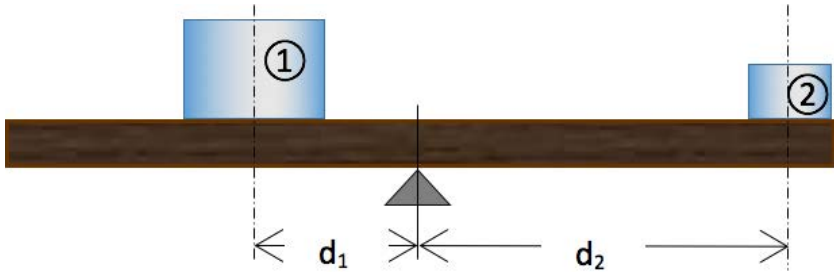
3.- Determine la fuerza ejercida por el agua sobre una compuerta circular de 4 pies de radio cuya parte superior e encuentra 2 pies por debajo del nivel del agua. (Peso específico del agua 62.4 lb/p^3)

R: 18819 lb

4.6.3 Momentos y centros de Masa–Centroide

La experiencia nos dice que para equilibrar una viga apoyada sobre el pivote A, estando cargada con dos pesos uno mayor que el otro, como está en la figura 51, es necesario ubicar el mayor peso más cerca del pivote y el menor más lejos.

Figura 51
Momentos producidos por dos masas



Para que se mantenga el equilibrio, debe producirse que el producto del peso ① por su distancia al pivote debe ser igual al producto del peso ② por su distancia al pivote.

$$P_1 x d_1 = P_2 x d_2$$

Al producto peso o fuerza en general por distancia se conoce como "momento". Entonces la condición para que haya equilibrio es que

$$M_1 = M_2$$

Por convención se considera positivo al momento que tiende a hacer girar en la dirección contraria a las manecillas del reloj y negativo al que tiende a hacer girar a favor de las manecillas del reloj. Entonces el cuerpo 1 de la figura 51 produce un momento positivo y el cuerpo 2 un momento negativo. La ecuación anterior entonces se la puede expresar como

$$M_1 + M_2 = 0$$

Tomando en consideración sus respectivos signos.

Generalizando para el caso en que hubiera *n* cuerpos produciendo momentos y reemplazando *d* por *x* si ubicamos en un plano cartesiano, para que haya equilibrio debe darse que

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \ldots\ldots + P_i x_n = 0$$

Si se reemplaza *P* por *mg* se tiene

$$m_1gx_1 + m_2gx_2 + m_3gx_3 + \ldots\ldots + m_ngx_n = 0$$

$$(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots\ldots + m_nx_n)g = 0$$

Para que la ecuación anterior sea igual a cero, debe darse que el paréntesis sea cero, ya que la gravedad *g* no es cero.

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots\ldots + m_nx_n = 0$$

El momento resultante producido por las *n* masas debería ser igual al momento que produjera una sola masa representativa de todas las anteriores, ubicada a una distancia conveniente como para que produzca el mismo momento. Lo anterior se puede expresar matemáticamente como

$$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots\ldots + m_nx_n = (m_1 + m_2 + m_3 + \cdots m_n)\bar{x}$$

Donde

$\bar{x}$ es la distancia a la que se ubicaría la masa representante y se la conoce como centro de masa. Si el cuerpo se puede asumir como si tuviera solo dos dimensiones, entonces $\bar{x}$ se llama centroide.

Ya que lo que interesa es encontrar la ubicación de la masa representante,

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots\ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

las coordenadas del centroide serían

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} A_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}, \frac{\sum_{i=1}^{n} A_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}\right)$$

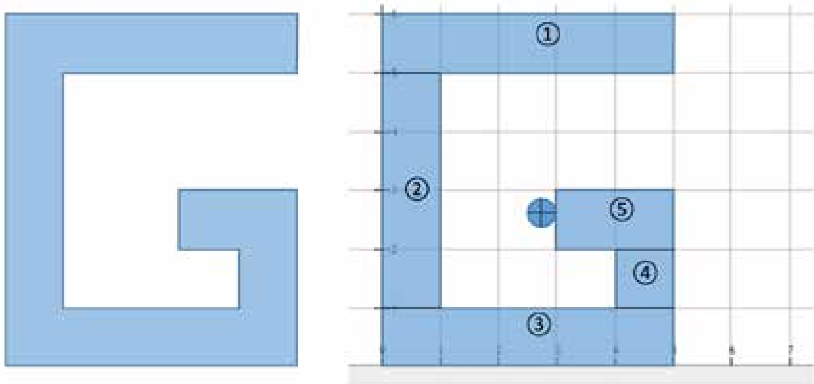
Donde *A* es el área de la figura

(Beer, Johnston, Aisenber, & y Aisenberg, 2010, p. 222).

Ejercicio 1

Encontrar las coordenadas el centroide de la figura 52.

Figura 52
Gráfico del Ejercicio 1



Ubicando el origen de los ejes coordenados y descomponiendo la figura en rectángulos cuyos centroides son conocidos se tiene

$$\bar{x} = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5}$$

$$A_1 = (5)(1) = 5u^2$$

$$A_2 = (1)(2) = 2u^2$$

$$A_3 = (5)(1) = 5u^2$$

$$A_4 = (1)(1) = 1u^2$$

$$A_5 = (2)(1) = 2u^2$$

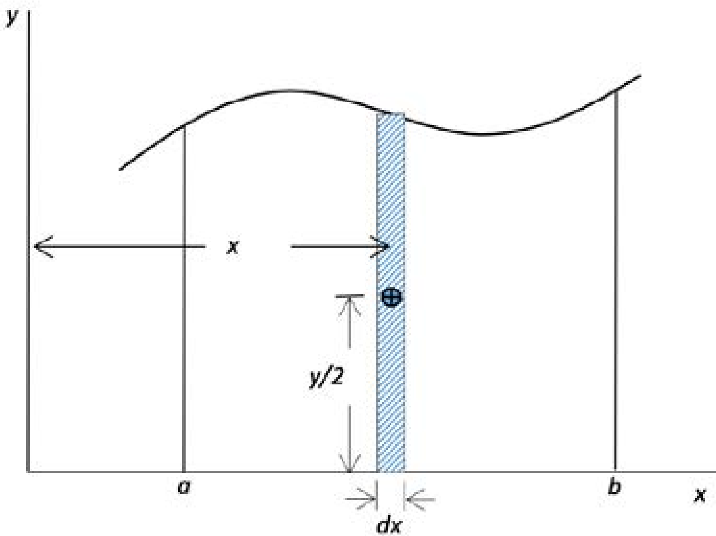
$$\bar{x} = \frac{(5)(2.5) + (2)(0.5) + (5)(2.5) + (1)(4.5) + (2)(4)}{5 + 2 + 5 + 1 + 2} = \frac{38.5}{15} = 2.57$$

$$\bar{y} = \frac{(5)(5.5) + (2)(3) + (5)(0.5) + (1)(1.5) + (2)(2.5)}{5 + 2 + 5 + 1 + 2} = \frac{42.5}{15} = 2.83$$

Las coordenadas del centroide es (2.57, 2.83)

Note que el centroide está más cargado hacia la derecha y hacia abajo debido que tiene más cantidad de área en esas direcciones.

Figura 53
Centroide del área bajo la curva en [a, b]
con rectángulos diferenciales verticales



Para el caso de áreas continuas como la figura 53 que pueden ser calculadas por integración, las fórmulas anteriores para el cálculo del centroide quedaría de la siguiente forma:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x dA}{\int_a^b dA}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{y}{2} dA}{\int_a^b dA}$$

En donde *dA* es el área del rectángulo diferencial, *x* es la distancia del centroide del rectángulo diferencial al eje *y* y *y/2* es la distancia del centroide del rectángulo diferencial hasta el eje *x*.

Las ecuaciones anteriores se las puede reescribir como

$$\bar{x} = \frac{M_{A,y}}{A} \quad \bar{y} = \frac{M_{A,x}}{A}$$

Donde M_{Ay} es el momento que produce el área con respecto al eje y y M_{Ax} es el momento que produce esa área con respecto al eje x, siendo

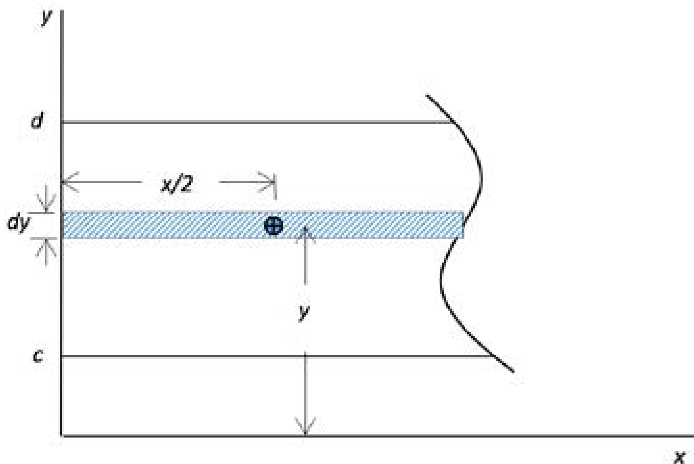
$$M_{A,y} = \int_a^b x dA\,; \;\; M_{A,x} = \int_a^b \frac{y}{2} dA$$

Para el caso de cálculo de centroides usando rectángulos diferenciales horizontales, las fórmulas son

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b \frac{x}{2} dA}{\int_a^b dA}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y dA}{\int_a^b dA}$$

Figura 54
Centroide del área bajo la curva con rectángulos diferenciales horizontales



Ejercicio 1

Hallar el centroide de la figura limitada por $y=4-x^2$ y los ejes co-ordenados *xy.*

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x dA}{\int_a^b dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{y}{2} dA}{\int_a^b dA}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^2 x(ydx)}{\int_0^2 ydx} = \frac{\int_0^2 x(4-x^2)dx}{\int_0^2(4-x^2)dx} = \frac{\int_0^2(4x-x^3)dx}{\int_0^2(4-x^2)dx}$$

$$= \frac{4\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^2 - \left|\frac{x^4}{4}\right|_0^2}{4|x|_0^2 - \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^2} = \frac{2(4) - \frac{16}{4}}{4(2) - \frac{8}{3}} = \frac{4}{\frac{16}{3}} = \frac{3}{4}$$

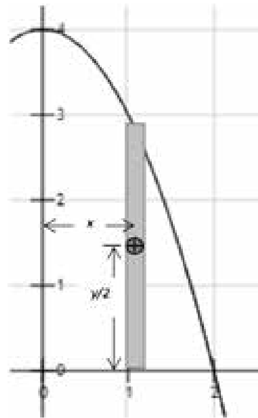
$$\bar{y} = \frac{\int_0^2 \frac{y}{2}(ydx)}{\int_0^2 ydx} = \frac{1}{2}\frac{\int_0^2 y^2 dx}{\int_0^2 ydx} = \frac{1}{2}\frac{\int_0^2(4-x^2)^2 dx}{\int_0^2(4-x^2)dx}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\int_0^2 16dx \text{-} \int_0^2 8x^2 dx + \int_0^2 x^4 dx}{\int_0^2 4dx - \int_0^2 x^2 dx}$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{16|x|_0^2 - 8\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + \left|\frac{x^5}{5}\right|_0^2}{4|x|_0^2 - \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^2} = \frac{1}{2}\frac{16(2) - \frac{8}{3}(8) + \frac{1}{5}(32)}{4(2) - \frac{1}{3}(8)} = \frac{16}{10}$$

Las coordenadas del centroide son: $\left(\frac{3}{4}, \frac{16}{10}\right)$

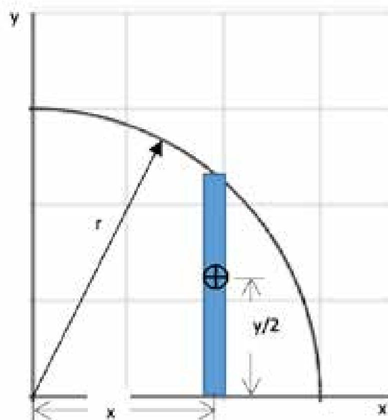
Figura 55
Gráfica del ejercicio 1



Ejercicio 2

Encontrar el centroide del sector de círculo de radio *r* mostrado en la figura 56.

Figura 56
Gráfica del ejercicio 2



La ecuación del círculo con centro en el origen y radio *r* es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^r x dA}{\int_0^r dA} = \frac{\int_0^r xydx}{\int_0^r ydx} = \frac{\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx}{\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx}$$

Resolviendo las integrales del numerador y denominador por separado

$$\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx \quad sea\; u = r^2 - x^2 \quad \rightarrow \quad du = -2xdx \quad \rightarrow xdx = -\frac{du}{2}$$

$$\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^r u^{\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{2}\left|\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^r = -\frac{1}{3}\left|\sqrt{(r^2 - x^2)^3}\right|_0^r$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\sqrt{(r^2 - r^2)^3} - \sqrt{(r^2 - 0^2)^3}\right] = -\frac{1}{3}\left(-\sqrt{r^6}\right) = \frac{1}{3}r^3$$

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \left|\frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}arcsen\frac{x}{a}\right|_0^r$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{r^2 - r^2} + \frac{r^2}{2}arcsen\frac{r}{r} - \frac{0}{2}\sqrt{r^2 - 0^2} + \frac{0^2}{2}arcsen\frac{0}{a} = \frac{\pi r^2}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{3}r^3}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^r \frac{y}{2}dA}{\int_0^r dA} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^r yydx}{\int_0^r ydx}$$

Resolviendo el integral del numerador

$$\frac{1}{2}\int_0^r y^2dx = \frac{1}{2}\int_0^r (r^2 - x^2)dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^r r^2dx - \int_0^r x^2dx\right] = \frac{1}{2}\left[\left|r^2x\right|_0^r - \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^r\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(r^3 — \frac{r^3}{3}\right) = \frac{1}{3}r^3$$

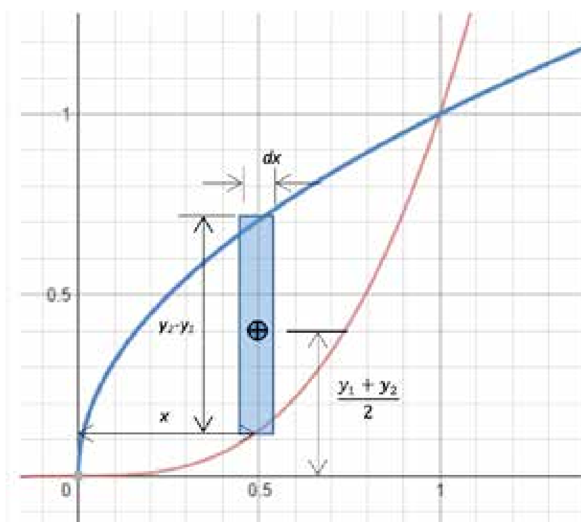
Ya que el denominador es el mismo que el calculado para $\bar{x}$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{3}r^3}{\frac{\pi r^2}{4}} = \frac{4r}{3\pi}$$

Ejercicio 3

Calcular las coordenadas del centroide del área que se encuentra entre las curvas $y=x^3$ y $y=x^{1/2}$

Figura 57
Gráfica del ejercicio 3



Cálculo de los límites de integración

$$x^3 = \sqrt{x}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación

$$x^6 = x \quad \rightarrow \quad x^6\text{-}x = 0 \quad x(x^5 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 1$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x\left(\sqrt{x} - x^3\right)dx}{\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right)dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\left|\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right|_0^1 - \left|\frac{x^5}{5}\right|_0^1}{\left|\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 - \left|\frac{x^4}{4}\right|_0^1} = \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{5}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{25}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)(y_2\text{-}y_1)dx}{\int_0^1 (y_2\text{-}y_1)dx}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\frac{\int_0^1 \left(x^3 + \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}\text{-}x^3\right)}{\int_0^1 \left(\sqrt{x}\text{-}x^3\right)dx}$$

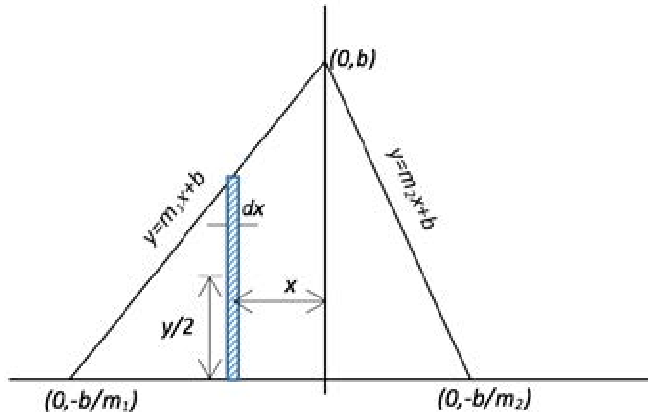
$$\bar{y} = \frac{1}{2}\frac{\int_0^1 \left(x^{7/2}\text{-}x^6 + x\text{-}x^{7/2}\right)dx}{\int_0^1 \left(\sqrt{x}\text{-}x^3\right)dx} = \frac{1}{2}\frac{\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \left|\frac{x^7}{7}\right|_0^1}{\left|\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 - \left|\frac{x^4}{4}\right|_0^1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{7}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{5}{14}}{\frac{5}{12}}\right) = \frac{3}{7}$$

Las coordenadas del centroide son $\left(\frac{12}{25}, \frac{3}{7}\right)$

Ejercicio 4

Calcular la posición del centroide de un triángulo en forma generalizada de tal manera que sirva para calcular esa posición para cualquier triángulo.

Figura 58
Gráfica del ejercicio 4



Ubicando el triángulo escaleno como se ve en la figura 58, de tal manera de calcular los centroides de los dos triángulos rectángulos a cada lado del eje ángulos a cada lado del eje *y.*

Para el triángulo rectángulo del lado izquierdo, limitado por los ejes *x, y* y la recta $y=m_1x+b$, donde *m1* es la pendiente del tercer lado y *(0,b)* el punto donde corta dicha recta al eje *y.*

$$\bar{x}=\frac{\int_{-b/m_1}^{0} xy\,dx}{\int_{-b/m_1}^{0} y\,dx}=\frac{\int_{-b/m_1}^{0} x(m_1x+b)\,dx}{\int_{-b/m_1}^{0}(m_1x+b)\,dx}=\frac{\int_{-b/m_1}^{0}(m_1x^2+bx)\,dx}{\int_{-b/m_1}^{0}(m_1x+b)\,dx}$$

$$=\frac{m_1\left|\frac{x^3}{3}\right|_{-b/m_1}^{0}+b\left|\frac{x^2}{2}\right|_{-b/m_1}^{0}}{m_1\left|\frac{x^2}{2}\right|_{-b/m_1}^{0}+b|x|_{-b/m_1}^{0}}=\frac{\frac{m_1}{3}\left[0-\left(-\frac{b}{m_1}\right)^3\right]+\frac{b}{2}\left[0-\left(-\frac{b}{m_1}\right)^2\right]}{\frac{m_1}{2}\left[0-\left(-\frac{b}{m_1}\right)^2\right]+b\left[0-\left(-\frac{b}{m_1}\right)\right]}$$

$$=\frac{\frac{m_1}{3}\left(\frac{b^3}{m_1^3}\right)+\frac{b}{2}\left(-\frac{b^2}{m_1^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(-\frac{b^2}{m_1^2}\right)+b\left(-\frac{b}{m}\right)}=\frac{\frac{b^3}{3m_1^2}-\frac{b^3}{2m_1^2}}{-\frac{b^2}{2m_1}+\frac{b^2}{m_1}}=\frac{\frac{b^3}{m_1^2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)}{\frac{b^2}{m_1}\left(-\frac{1}{2}+1\right)}=-\frac{1}{3}\frac{b}{m_1}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_{-b/m_1}^{0} \frac{y}{2} y dx}{\int_{-b/m_1}^{0} y dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-b/m_1}^{0} y^2 dx}{\int_{-b/m_1}^{0} y dx} = \frac{1}{2}\frac{\int_{-b/m_1}^{0} (m_1 x + b)^2 dx}{\int_{-b/m_1}^{0} (m_1 x + b) dx}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\int_{-b/m_1}^{0} (m_1^2 x^2 + 2m_1 xb + b^2) dx}{\int_{-b/m_1}^{0} (m_1 x + b) dx}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1^2 \left|\frac{x^3}{3}\right|_{-b/m_1}^{0} + 2m_1 b \left|\frac{x^2}{2}\right|_{-b/m_1}^{0} + b^2 |x|_{-b/m_1}^{0}}{m_1 \left|\frac{x^2}{2}\right|_{-b/m_1}^{0} + b|x|_{-b/m_1}^{0}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{m_1^2}{3}\left[0 - \left(-\frac{b}{m_1}\right)^3\right] + m_1 b \left[0 - \left(-\frac{b}{m_1}\right)^2\right] + b^2 \left[0 - \left(-\frac{b}{m_1}\right)\right]}{\frac{m_1}{2}\left[0 - \left(-\frac{b}{m_1}\right)^2\right] + b\left[0 - \left(-\frac{b}{m_1}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{m_1^2}{3}\left[\frac{b^3}{m_1^3}\right] + m_1 b \left[-\frac{b^2}{m_1^2}\right] + b^2 \left[\frac{b}{m_1}\right]}{\frac{m_1}{2}\left[-\frac{b^2}{m_1^2}\right] + b\left[\frac{b}{m_1}\right]} = \frac{1}{2}\frac{\frac{b^3}{3m_1} - \frac{b^3}{m_1} + \frac{b^3}{m_1}}{-\frac{b^2}{2m_1} + \frac{b^2}{m_1}} = \frac{1}{2}\frac{\frac{b^3}{3m_1}}{\frac{b^2}{2m_1}} = \frac{1}{3}b$$

Las coordenadas del centroide del triángulo izquierdo es $\left(-\frac{1}{3}\frac{b}{m_1}, \frac{1}{3}b\right)$

Siguiendo el mismo procedimiento, las coordenadas del centroide del rectángulo derecho es $\left(-\frac{1}{3}\frac{b}{m_2}, \frac{1}{3}b\right)$

El $\bar{y}$ de las dos figuras en conjunto es

$$\bar{y} = \frac{A_1\overline{y_1} + A_2\overline{y_2}}{A_1 + A_2} = \frac{A_1\left(\frac{b}{3}\right) + A_2\left(\frac{b}{3}\right)}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{b}{3}(A_1 + A_2)}{A_1 + A_2} = \frac{b}{3} \; o\ en\ palabras, \bar{y} = \frac{1}{3}(altura)$$

El $\bar{x}$ de las dos figuras en conjunto es

$$A_1 = \frac{\left(-\frac{b}{m_1}\right)b}{2}; \;\; A_2 = \frac{\left(-\frac{b}{m_2}\right)b}{2}$$

Siendo

$$A_1 = \frac{\left(-\frac{b}{m_1}\right) b}{2}; \; A_2 = \frac{\left(-\frac{b}{m_2}\right) b}{2}$$

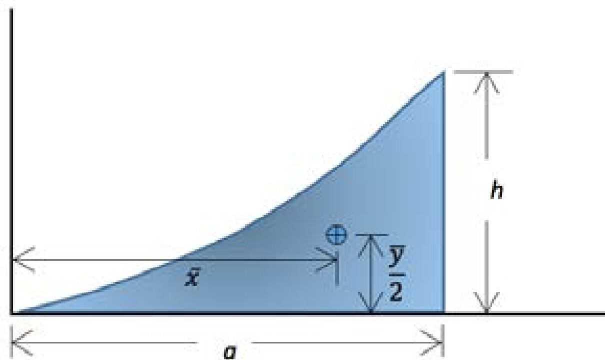
Note que si se trata de un triángulo isósceles, entonces *A1=A2* y las pendientes son iguales y de signo cambiado, lo que hace que el numerador sea cero, cuya interpretación es que el A está sobre el eje *y* como se esperaría.

Ejercicios propuestos sección 4.6.3

1. Encontrar una fórmula que sirva para calcular la posición del centroide de la enjuta parabólica dada en forma general por $y=kx^2$ desde el punto (0,0) hasta el punto *(a,h)*.

$$R: \bar{x} = \frac{3a}{4}; \; \bar{y} = \frac{3h}{10}$$

Figura 59
Gráfica del problema 1



2. Encuentre el centroide del área bajo la curva de la parábola $y=4-x^2$ en [-2,2]

$$R: \bar{x} = 0;\ \bar{y} = \frac{8}{5}$$

3. Encontrar el centroide del área encerrada por las curvas $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$

$R: \left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20}\right)$

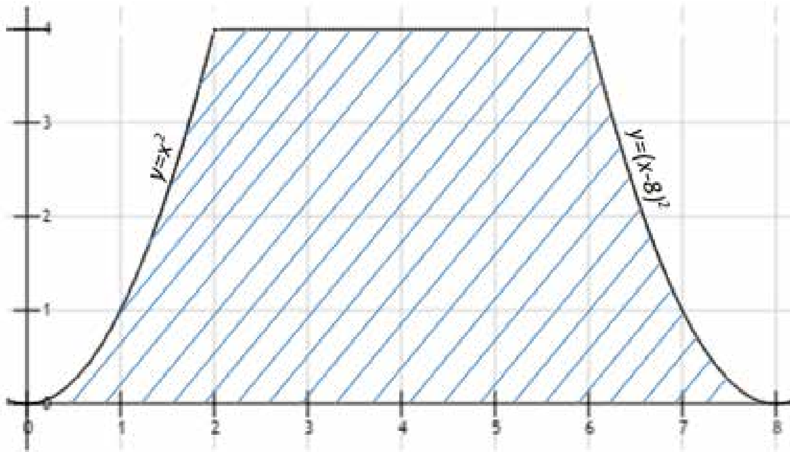
4. Encontrar el centroide del área bajo la curva *y=senx* en *[0,π]*

$R: \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$

5. Calcular las coordenadas del centroide del área de la figura 60

$R: \left(4, \frac{42}{25}\right)$

Figura 60
Gráfica del problema 5



Capítulo 5
Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

En muchas ocasiones, una función del tipo *y=f(x)* es muy difícil, sino imposible de expresarla. En dichas ocasiones es mejor trabajar con otros tipos de ecuaciones o de coordenadas.

5.1 Ecuaciones paramétricas

Cuando las variables *x* y *y* se pueden expresar en función de una tercera variable (llamada parámetro), entonces se tienen las ecuaciones paramétricas que se pueden expresar de la siguiente forma

$$x=f(t);\ y=g(t)$$

Generalmente y sobre todo en ingeniería, ese tercer parámetro suele ser el tiempo y es por eso que se lo suele expresar como *t*, aunque no necesariamente es siempre el tiempo, también puede ser ángulo o cualquier otra variable que convenga. (Stewart, 2008, p. 621).

5.1.1 Ecuaciones paramétricas de la recta

En álgebra lineal se estudia que las rectas tienen como ecuaciones paramétricas las siguientes ecuaciones:

$$x = x_1 + at$$

$$y = y_1 + bt$$

Si se trata de una recta en el espacio, se le aumenta la ecuación correspondiente para la tercera coordenada *z* que sería $z=z1+ct$

Si se conocen dos puntos de la recta, las ecuaciones paramétricas a usar son:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

Igualmente, si se trata de recta en el espacio, se añade una tercera ecuación *z=z1+(z2-z1)t*

Para comprobar que se trata de las ecuaciones de una recta, se pueden convertirlas a coordenadas rectangulares despejando el parámetro *t* de una de ellas y reemplazarla en la otra ecuación como se aprecia en el siguiente ejercicio

Ejercicio 1

Convertir las ecuaciones paramétricas a ecuación en coordenadas rectangulares

Despejando el parámetro *t* de la primera ecuación

$$t = \frac{x - x_1}{a}$$

Reemplazando en la segunda ecuación

$$y = y_1 + b\left(\frac{x - x_1}{a}\right) \quad \rightarrow \quad y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1)$$

Esta es la ecuación de una recta conociendo punto (x_1,y_1) y la pendiente dada en este caso por *b/a*

Ejercicio 2

Graficar las ecuaciones paramétricas *x=2+t; y=-1+2t*

1er Método: Dar valores al parámetro *t* y de acuerdo a esos valores obtener los valores de *x* y *y*

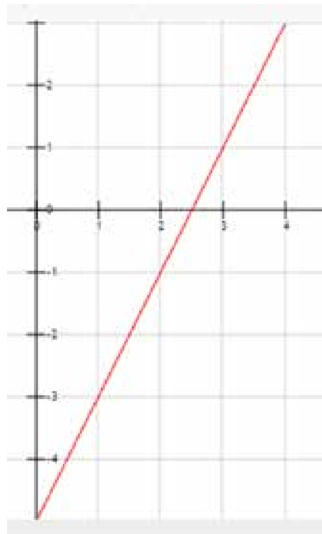
t	x=4cost	y=4sent
-2	4	0
-1	2.161	3.366
0	-1.665	3.637
3	-3.960	0.564
4	-2.615	-3.027
5	1.135	-3.836
6	3.841	-1.118

2do Método: Convertir las ecuaciones paramétricas a rectangulares y graficar

Despejando t de la primera ecuación y reemplazando en la segunda

$$t = x - 2 \quad \rightarrow \quad y = -1 + 2(x - 2) \quad \rightarrow \quad y = 2x - 5$$

Figura 61
Gráfica del ejercicio 1

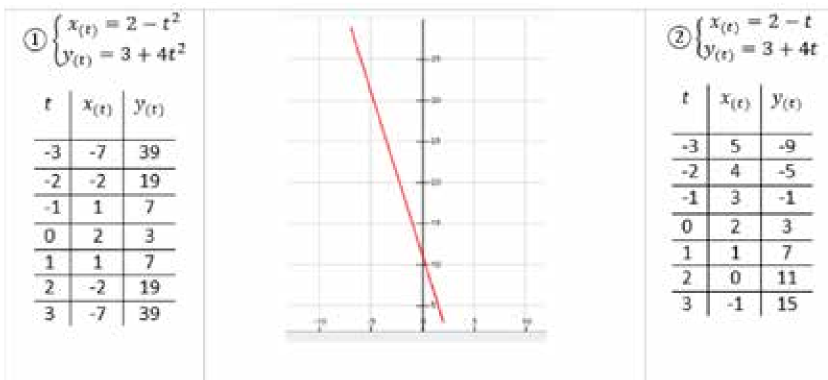


Es una recta con pendiente 2 y corta al eje *y* en *-5* como se aprecia en la figura 61

Ejercicio 3

Graficar las siguientes ecuaciones paramétricas

Figura 62
Gráfica del ejercicio 2



① $\begin{cases} x_{(t)} = 2 - t^2 \\ y_{(t)} = 3 + 4t^2 \end{cases}$

t	$x_{(t)}$	$y_{(t)}$
-3	-7	39
-2	-2	19
-1	1	7
0	2	3
1	1	7
2	-2	19
3	-7	39

② $\begin{cases} x_{(t)} = 2 - t \\ y_{(t)} = 3 + 4t \end{cases}$

t	$x_{(t)}$	$y_{(t)}$
-3	5	-9
-2	4	-5
-1	3	-1
0	2	3
1	1	7
2	0	11
3	-1	15

El estudiante puede comprobar que todos los puntos para ambos pares de ecuaciones paramétricas, caen sobre una recta. La diferencia está en la forma en que se mueve el punto a lo largo de la recta. Así para el caso de las ecuaciones de la izquierda, el punto, conforme avanza el tiempo *t*, se mueve de izquierda a derecha y luego regresa por la misma recta. Para el caso de las ecuaciones de la derecha, el punto siempre se mueve de derecha a izquierda a lo largo de la recta. Además, el intervalo para x para las ecuaciones ① es [-7,2] mientras que para las ecuaciones ② es [-1,5]. Esto quiere decir que una misma curva puede tener muchas ecuaciones paramétricas que la describan.

Las ecuaciones paramétricas en ocasiones pueden tener restricciones. Para las ecuaciones antes mencionadas, una restricción puede ser $t \geq 0$ debido a que el tiempo no puede ser negativo.

5.1.2 Ecuaciones paramétricas del círculo

Ejercicio 3

Suponga el siguiente par de ecuaciones paramétricas

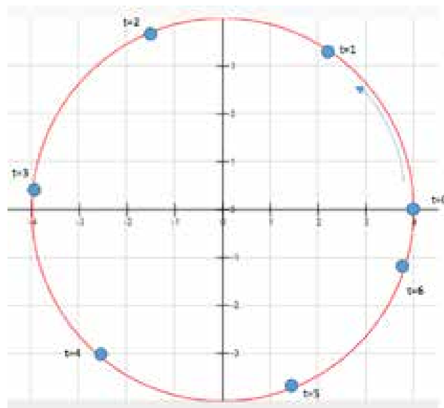
$$x = 4cost$$

$$y = 4sent$$

Donde *t* va a variar en incrementos de 1 desde 0 hasta 6. Dando valores a *t*

t	*x=4cost*	*y=4sent*
0	4	0
1	2.161	3.366
2	-1.665	3.637
3	-3.960	0.564
4	-2.615	-3.027
5	1.135	-3.836
6	3.841	-1.118

Figura 63
Gráfica del ejercicio 3



Se puede observar que la curva descrita es una circunferencia y el punto viaja sobre la misma en dirección contraria a las agujas del reloj.

Se puede comprobar que la curva es una circunferencia convirtiendo las ecuaciones paramétricas a funciones de x y y solamente por medio de manipulaciones matemáticas como sigue

$$x = 4cost$$

$$y = 4sent$$

Elevando ambas ecuaciones al cuadrado y sumando término a término se tiene

$$\begin{array}{lrcl} & x^2 & = & 16cos^2t \\ + & & & \\ & y^2 & = & 16sen^2t \\ \hline & x^2 + y^2 & = & 16cos^2t + 16sen^2t \end{array}$$

Factorizando

$$x^2 + y^2 = 16(cos^2t + sen^2t)$$

Aplicando la identidad trigonométrica

$$x^2 + y^2 = 16$$

Que es la ecuación de un círculo con centro en el origen y radio 4. (Stewart, 2008, p. 622).

Ejercicio 4

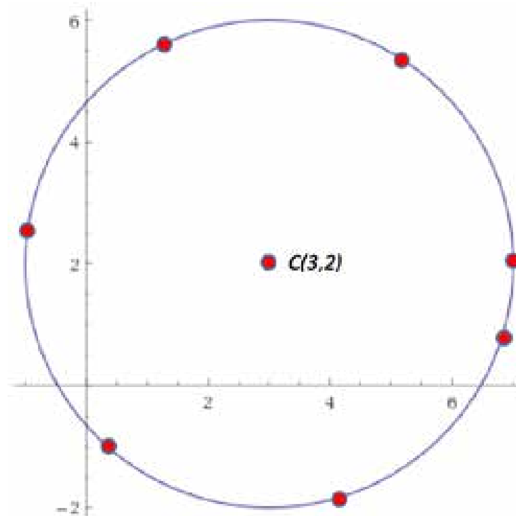
Graficar y convertir a ecuaciones rectangulares las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = 3 + 4cost; y = 2 + 4sent$$

t	*x=3+4cost*	*y=2+4sent*
0	7,000	2,000
1	5,161	5,366

2	1,335	5,637
3	-0,960	2,564
4	0,385	-1,027
5	4,135	-1,836
6	6,841	0,882

Figura 64
Gráfica del ejercicio 4



Se aprecia que la curva resultante es una circunferencia. Para comprobar esto, se convierte las ecuaciones paramétricas a rectangulares

$$x = 3 + 4cost$$

$$y = 2 + 4sent$$

Pasando el término independiente de ambas ecuaciones al lado izquierdo

$$x\text{-}3 = 4cost$$

$$y\text{-}2 = 4sent$$

Elevando al cuadrado ambos miembros en las dos ecuaciones

$$(x-3)^2 = 16cos^2t$$

$$(y-2)^2 = 16sen^2t$$

Sumando término a término ambas ecuaciones

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16cos^2t + 16sen^2t$$

Factorizando y aplicando la identidad trigonométrica

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$$

Que es la ecuación de la circunferencia en su forma canónica con centro en *(3,2)* y radio *4.*

Obviando la demostración que no es tema de este libro, se puede concluir que la ecuación de la circunferencia con centro en cualquier punto *(h,k)* y radio *r* es

$$x = h + rcost; \quad y = k + rsent$$

$$para\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

Note que si el intervalo de graficación fuera $0 \leq t \leq 4\pi$ entonces los puntos se repetirían sobre la misma curva hasta dar dos vueltas.

5.1.3 Ecuaciones paramétricas de la parábola

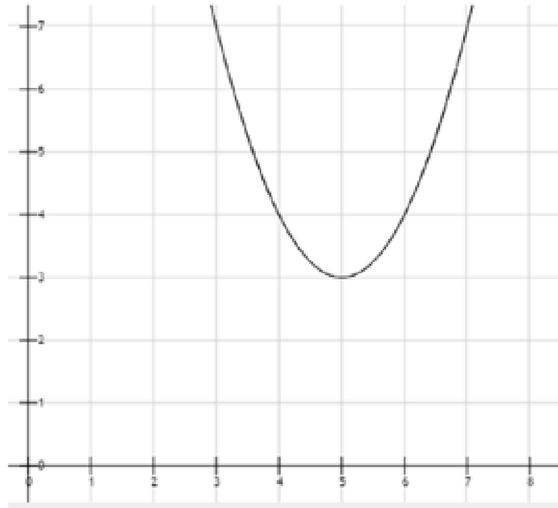
Ejercicio 5

Un cuerpo se mueve conforme a las siguientes ecuaciones paramétricas: $x=t+3$; $y=t^2-4t+7$. Indicar el tipo de curva sobre la cual se mueve el cuerpo. (De Oteyza, Lam, Hernández, Carrillo, & y Ramírez, 2011, p. 257).

Despejando *t* de la primera ecuación

$$t = x - 3$$

Figura 65
Gráfica del ejercicio 4



Reemplazando en la segunda ecuación

$$y = (x—3)^2—4(x—3) + 7 \quad \rightarrow \quad y = x^2—6x + 9—4x + 12 + 7 \quad \rightarrow \quad y = x^2—10x + 28$$

Que es una parábola con vértice en (5,3)

Generalizando, las ecuaciones paramétricas de una parábola tienen la siguiente forma

$$x_{(t)} = at + b$$

$$y_{(t)} = At^2 + Bt + C$$

Si se desea realizar el proceso contrario, es decir teniendo las ecuaciones en coordenadas rectangulares, encontrar las ecuaciones paramétricas, es decir, parametrizar, se recomienda lo siguiente:

Utilizar como parámetro la variable que está elevada al cuadrado. Así si:

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

Es la ecuación de una parábola en su forma general, se hace

$$x_{(t)} = t$$

$$y_{(t)} = At^2 + Bt + C$$

Ejericio 6

Convertir la ecuación de la parábola del ejercicio 4 en su forma rectangular a paramétricas.

La ecuación de la parábola del ejercicio anterior en su forma rectangular es

$$y = x^2 - 10x + 28$$

Al parametrizarla queda

$$x_{(t)} = t$$

$$y_{(t)} = t^2 - 10t + 28$$

El estudiante puede comprobar que se trata de la misma parábola. El intervalo se puede hacer coincidir ajustando los valores de *t.*

5.1.4 Ecuaciones paramétricas de la elipse

Las ecuaciones paramétricas de la elipse horizontal están dadas por

$$x_{(t)} = h + acost$$

$$y_{(t)} = k + bsent$$

Las ecuaciones paramétricas de la elipse vertical están dadas por

$$x_{(t)} = h + bcost$$

$$y_{(t)} = k + asent$$

(De Oteyza, Lam, Hernández, Carrillo, & y Ramírez, 2011, p. 316).

Para comprobar que se trata de una elipse horizontal, despejamos *cost* y *sent* de ambas ecuaciones, las elevamos al cuadrado y sumamos término a término.

$$\frac{x_{(t)} - h}{a} = cost$$

$$\frac{y_{(t)} - k}{b} = sent$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones

$$\frac{\left(x_{(t)} - h\right)^2}{a^2} = cos^2 t$$

$$\frac{\left(y_{(t)} - k\right)^2}{b^2} = sen^2 t$$

Sumando término a término ambas ecuaciones

$$\frac{\left(x_{(t)} - h\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y_{(t)} - k\right)^2}{b^2} = cos^2 t + sen^2 t$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\frac{\left(x_{(t)} - h\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y_{(t)} - k\right)^2}{b^2} = 1$$

Esta es la ecuación de una elipse con centro en *(h,k)* con semiejes *a* y *b* para *a>b.*

El estudiante puede realizar el mismo desarrollo para el caso de elipse vertical

Ejercicio 7

Parametrizar la elipse $9x^2+16y^2-18x+64y-71=0$

Convirtiendo la ecuación anterior de la elipse que está en su forma general, a la forma simétrica. Para ello, se reordena los términos con la intención de formar cuadrados perfectos

$$(9x^2 - 18x +) + (16y^2 + 64y +) = 71$$

Sacando factor común de ambos paréntesis

$$(9x^2 - 18x +) + (16y^2 + 64y +) = 71$$

$$9(x^2 - 2x +) + 16(y^2 + 4y +) = 71$$

Aumentando términos en ambos paréntesis para completar cuadrados y balanceando la ecuación

$$9(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 + 4y + 4) = 71 + 9 + 64 \quad \rightarrow \quad 9(x - 1)^2 + 16(y + 2)^2 = 144$$

Dividiendo ambos miembros para 144

$$\frac{9(x-1)^2}{144} + \frac{16(y+2)^2}{144} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{16(y+2)^2}{9} = 1$$

Esta última es la ecuación de la elipse en su forma simétrica donde *a=4; b=3*

Las ecuaciones paramétricas de esa elipse son

$$x_{(t)} = 1 + 4cost$$

$$y_{(t)} = -2 + 3sent$$

5.1.5 Ecuaciones paramétricas de la hipérbola

Las ecuaciones paramétricas de la hipérbola horizontal están dadas por

$$x_{(t)} = h + asect$$

$$y_{(t)} = k + btgt$$

Las ecuaciones paramétricas de la hipérbola vertical están dadas por

$$x_{(t)} = h + btgt$$

$$y_{(t)} = k + asect$$

(De Oteyza, Lam, Hernández, Carrillo, & y Ramírez, 2011, p. 386).

Ejercicio 8

Convertir las ecuaciones paramétricas *x(t)=-6+7sect; y(t)=-5+9tgt* a rectangulares

Despejando *sect* y *tgt*

$$sect = \frac{x+6}{7}; \quad tgt = \frac{y+5}{9}$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones

$$sec^2t = \frac{(x+6)^2}{49}; \quad tg^2t = \frac{(y+5)^2}{81}$$

Restando ambas ecuaciones término a término

$$sec^2t — tg^2t = \frac{(x+6)^2}{49} — \frac{(y+5)^2}{81}$$

Usando la identidad trigonométrica

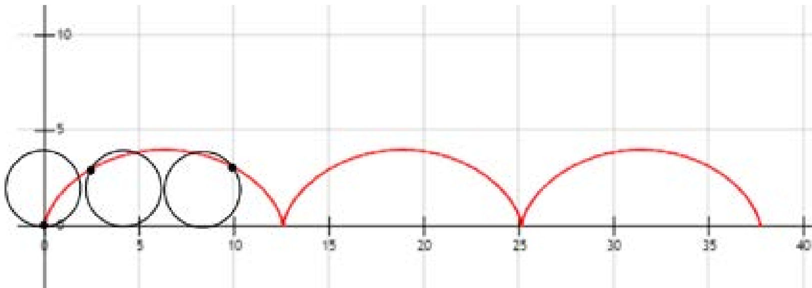
$$\frac{(x+6)^2}{49} - \frac{(y+5)^2}{81} = 1$$

Que es la ecuación de una hipérbola horizontal con centro en *(-6,-5)* con *a=7; b=9*

5.1.6 Otras ecuaciones paramétricas

Un gráfico muy conocido en el estudio de las ecuaciones paramétricas es el de la Cicloide que es la curva que describe un punto sobre una circunferencia cuando esta rueda sobre una superficie plana como el caso de la rueda de una bicicleta como la de la figura 66 cuyas ecuaciones paramétricas son:

Figura 66
Cicloide generado por un punto de una circunferencia
al rodar sobre una superficie plana



$$x = r(\theta - sen\theta); y = r(1 - cos\theta)$$

Con ecuaciones paramétricas se pueden representar de manera relativamente simple, curvas que con las ecuaciones rectangulares sería muy difícil o imposible. Algunos ejemplos se presentan a continuación:

Figura 67
x=cos5t; y=sen3t

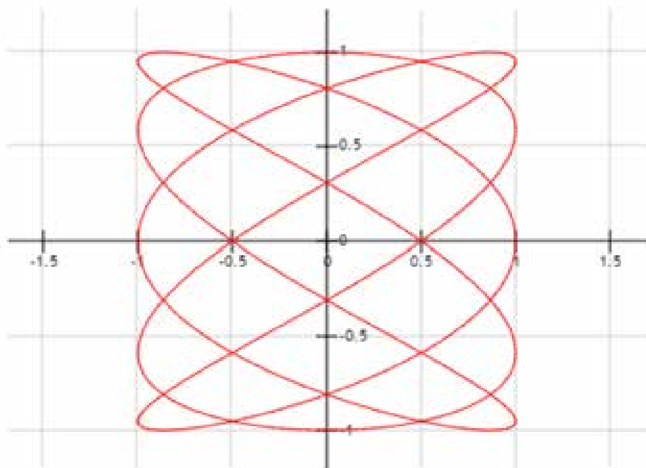
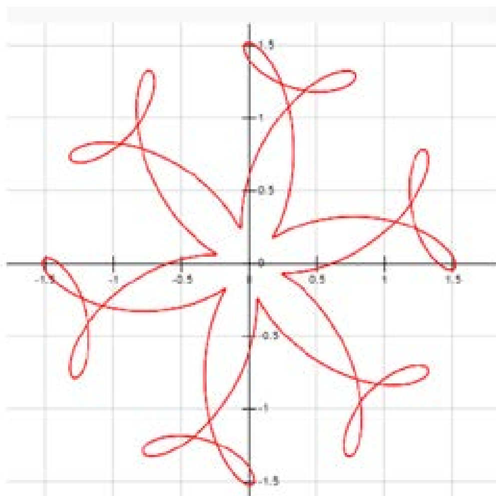


Figura 68
x=sent+1/2 cos5t+1/4 sen13t; y=cost+1/2sen5t+1/4cos13t



5.1.7 Recta tangente áreas y longitud de arco con ecuaciones paramétricas

Recta tangente con ecuaciones paramétricas

El problema más importante en el Cálculo Diferencial y una de las razones por las que fue creado es el cálculo de la pendiente de una recta tangente a una curva.

Para el caso de ecuaciones paramétricas, la pendiente de una recta tangente a una curva está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \ siempre\ que\ \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Si se desea encontrar pendientes horizontales como el caso de máximo o mínimos, entontes, el numerador es cero

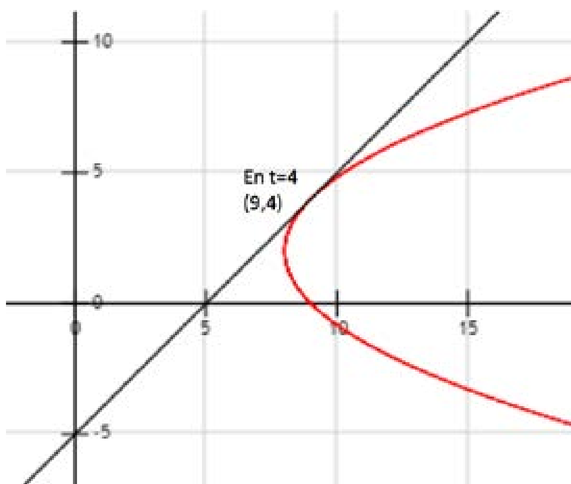
$$\frac{dy}{dt} = 0$$

Si se desea encontrar pendientes verticales, el denominador es cero

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

Ejercicio 1

Figura 69
Gráfica del ejercicio 1



Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva con ecuaciones paramétricas $x(t)=1/4(t\text{-}2)^2+8;\ y(t)=t$ para $t=4$ y graficar.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(t)}{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}(t-2)^2 + 8\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{t}{2} - 1} \quad \rightarrow \quad \left.\frac{dy}{dx}\right)_{t=4} = 1$$

La pendiente de la recta es 1 y su ángulo con respecto a la horizontal es 45°.

La ecuación de la recta tangente es

$$y = x - 5$$

Ejercicio 2

Encontrar para que valores de *t*, la función dada por $x(t)=t+3$; $y(t)=t^2-4t+7$ del ejercicio 4 de la sección 5.1. pasa por un máximo o un mínimo.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

En un máximo o mínimo, la derivada es cero y para ello basta con que el numerador de la fracción sea cero, es decir

$$\frac{dy}{dt} = 2t - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 2$$

Para $t=2$, $x(t)=2+3=5$; $y(t)=2^2-4(2)+7=3$

Es decir, la curva pasa por un mínimo en *(5,3)* como se puede apreciar en la figura 53

Áreas con ecuaciones paramétricas

En la sección 4.1 se vio que el área bajo la curva estaba dada por

$$A = \int_a^b y dx$$

Si las ecuaciones paramétricas están dadas por *x=f(t); y=g(t)*, entonces

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} g_{(t)} f'_{(t)} dt$$

(Stewart, 2008, p. 632).

Ejercicio 3

Encuentre el área bajo la curva de una arcada de cicloide.

$$x = r(\theta - sen\theta); \;\; y = r(1 - cos\theta)$$

Una arcada de cicloide va de *0* a *2π*

$$dx = r(1 - cos\theta)d\theta$$

Reemplazando

$$A = \int_0^{2\pi} r(1 - cos\theta) r(1 - cos\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} r^2 (1 - cos\theta)^2 d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2cos\theta + cos^2\theta) d\theta = r^2 \left[\int_0^{2\pi} d\theta - 2\int_0^{2\pi} cos\theta d\theta + \int_0^{2\pi} cos^2\theta d\theta \right]$$

$$= r^2 \left[|\theta| \begin{matrix} 2\pi \\ 0 \end{matrix} - 2|sen\theta| \begin{matrix} 2\pi \\ 0 \end{matrix} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + cos2\theta) d\theta \right]$$

$$= r^2 \left[|\theta| \begin{matrix} 2\pi \\ 0 \end{matrix} - 2|sen\theta| \begin{matrix} 2\pi \\ 0 \end{matrix} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} cos2\theta d\theta \right]$$

$$= r^2 \left[2\pi + \frac{1}{2}|\theta| \begin{matrix} 2\pi \\ 0 \end{matrix} + \frac{1}{2}\left| \frac{sen2\theta}{2} \right| \begin{matrix} 2\pi \\ 0 \end{matrix} \right] = r^2 \left[2\pi + \frac{1}{2} 2\pi \right] = 3\pi r^2$$

Longitud de arco con ecuaciones paramétricas

En la sección 4.4 se vio que la longitud del arco de una función cualquiera era

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Reemplazando la fórmula vista para derivadas de ecuaciones paramétricas se tiene

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2}\,dx\left(\frac{dt}{dt}\right)=\int_a^b \sqrt{\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}\frac{dx}{dt}dt=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

(Stewart, 2008, p. 633).

Ejercicio 4

Encontrar la longitud de una arcada de cicloide

$$x=r(\theta-sen\theta);\;\; y=r(1-cos\theta)$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(1-cos\theta)^2+r^2(sen\theta)^2}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} r\sqrt{2-2cos\theta}d\theta=\int_0^{2\pi} r\sqrt{2}\sqrt{1-cos\theta}d\theta$$

Usando la identidad trigonométrica $sen^2\theta=\frac{1}{2}(1-cos2\theta)$ y adaptándola a nuestra integral

$$sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-cos\theta)\quad\rightarrow\quad 2sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=1-cos\theta$$

$$L=r\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta=2r\int_0^{2\pi} sen\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=-2r\left|2cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|_0^{2\pi}=-4r(-1-1)$$

$$L=8r$$

Ejercicios propuestos a la sección 5.1

1. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos P(5,3) y Q(8,2)

$$R: x = 5 + 3t; \quad y = 3 - t$$

2. Parametrizar la curva *4x+y-5=0*

$$R: \ x = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}t; \quad y = 5t$$

3. Encontrar las ecuaciones paramétricas del círculo cuyo centro está en C(2,-5) y el radio es 6.

$$R: x = 2 + 6cost; \quad y = -5 + 6sent$$

4. Parametrizar el círculo $9x^2+9y^2+72x-12y+103=0$

$$R: x = -4 + \sqrt{5}cost; \quad y = \frac{2}{3}\sqrt{5}sent$$

5. Parametrizar la parábola $x=y^2-12y+25$

$$R: y = t; \quad x = t^2 - 12t + 25$$

6. Convertir las siguientes ecuaciones paramétricas a rectangulares o cartesianas:

$$x = t; \quad y = \frac{1}{2}t^2 + 5t - 16$$

$$R: y = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 16 \ en \ su \ forma \ general \ o \ (x + 5)^2 = 2\left(y + \frac{57}{2}\right) \ en \ forma \ canónica$$

7. Encontrar la ecuación general de la elipse cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = -3 + 2cost; \quad y = 5 + sent$$

$$R: x^2 + 4y^2 + 6x - 40y + 105 = 0$$

8. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la elipse $9x^2+16y^2-18x+64y-71=0$

$$R: x = 1 + 4cost; \quad y = -2 + 3sent$$

9. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la hipérbola $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{9} = 1$

10. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = 5tgt; \quad y = -2 + 3sect$$

$$R: \frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-5)^2}{1} = 1$$

11. Graficar la función dada por *x=cost; y=sen2t*. Encontrar los puntos donde hay tangentes horizontales.

$$R: \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

12. Calcular el área total dentro de la curva del ejercicio 11.

$$R: \frac{2}{3}\, u^2$$

5.2 Coordenadas polares

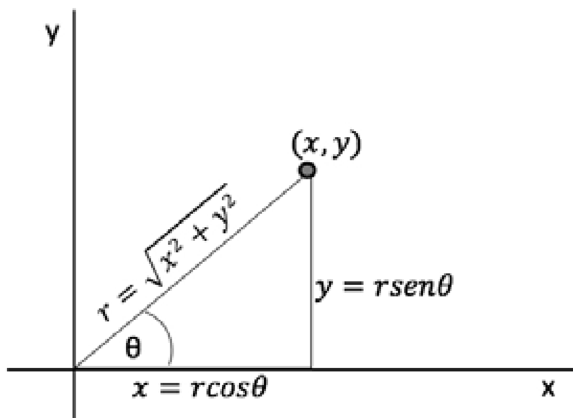
Hasta ahora se han representado puntos en el plano por medio de las coordenadas cartesianas que consiste en ubicar el punto por medio de las distancias que hay de éste a los ejes *x* y *y*. Otro método para ubicar un punto en el plano es usando las coordenadas polares, que consiste en medir la distancia que hay entre el punto y otro llamado origen, ésta constituye la primera coordenada. La segunda coordenada se la obtiene midiendo el ángulo que hay entre la recta que une el punto con el origen y otra recta, que generalmente es horizontal llamada eje polar.

En la figura 70 se aprecia una combinación de coordenadas polares y rectangulares con círculos concéntricos de radios 1, 2, 3, 4, etc. y líneas de punto y raya que dividen al círculo en intervalos de 15° o π/12 radianes para facilitar la ubicación de los puntos. Las divisiones de los ángulos están especificadas para la mitad superior del círculo. Se deja al estudiante, completar la mitad inferior a manera de ejercicio. Los puntos (3,π/12); (2,π/3); (1,3π/4); (-3,5π/4); (4,5π/3) aparecen graficados.

Note que a diferencia de las coordenadas rectangulares, en donde un punto solo tiene una identificación dada por el par de coordenada por ejemplo (3,4), en las coordenadas polares, un mismo punto puede ser representado por muchos pares de coordenadas. Así por ejemplo, el punto (4,5π/3) de la gráfica, se puede representar también por (4,- π/3) o (-4, 2π/3), incluso se pueden representar por ángulos que han dado una vuelta completa, tal como (4, 11π/3) obtenido sumando 2π al ángulo.

La conversión entre coordenadas rectangulares se la puede hacer usando el teorema de Pitágoras

Figura 70
Conversión de coordenadas rectangulares a polares



(Stewart, 2008, p. 639).

Conversión coordenadas rectangulares a polares:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

Conversión coordenadas polares a rectangulares:

$$x = r\cos\theta;\ y = r\,sen\theta$$

Ejercicio 1

Convertir las coordenadas del punto (3,2) que está en coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

$$r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13};\quad \theta = tg^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 0.59\,rad$$

El punto (3,2) que está en coordenadas rectangulares, en coordenadas polares equivale a $(\sqrt{13}, 0.59\,rad)$

Ejercicio 2

Encontrar las coordenadas rectangulares correspondientes al punto (2,π/3) de coordenadas polares.

El radio es *r=2* y el ángulo es $\theta = \pi/3$

$$x = 2sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3};\ \ y = 2cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

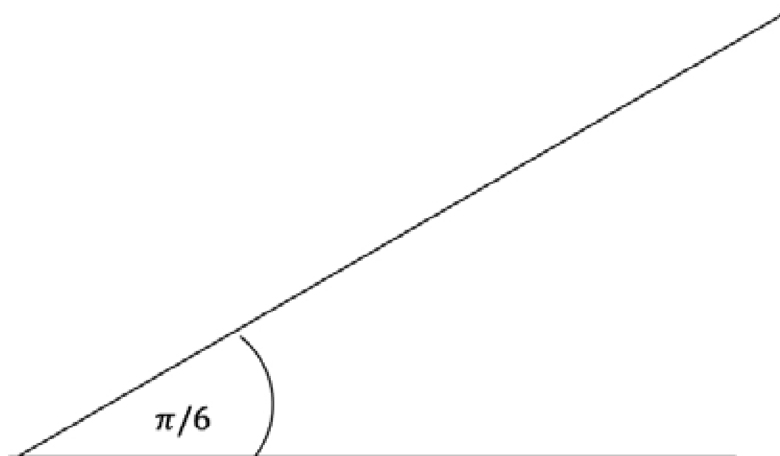
El punto (2,π/3) que está en coordenadas polares, en coordenadas coordenadas rectangulares equivale a $(\sqrt{3}, 1)$.

Ejercicio 3

Graficar la curva $\theta = \pi/6$

$\theta = \pi/6$ es una recta que pasa por el origen y que tiene un ángulo de 30° o π/6 rad con la horizontal, ya que para cualquier valor de *r*, el ángulo siempre va a ser π/6.

Figura 71
Gráfica del ejercicio 3



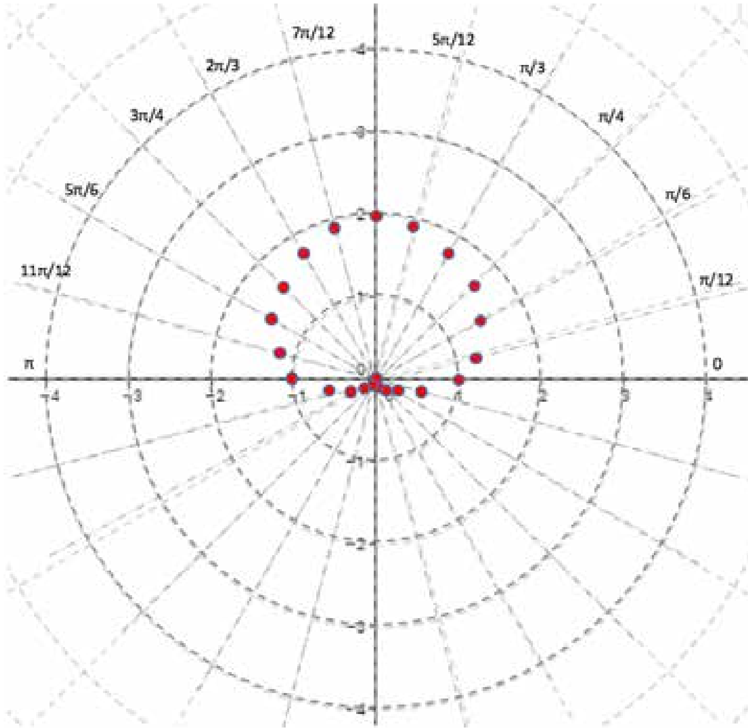
Ejercicio 4

Graficar la curva $r=1+sen\theta$

θ (rad) r=1+senθ	0 1	π/12 1.26	π/6 1.5	π/4 1.7	π/3 1.87	5π/12 1.97	π/2 2
θ (rad) r=1+senθ	7π/12 1.97	2π/3 1.87	3π/4 1.7	5π/6 1.5	11π/12 1.26	π 1	
θ (rad) r=1+senθ	13π/12 0.74	7π/6 0.5	5π/4 0.29	4π/3 0.13	17π/12 0.03	3π/2 0	
θ (rad) r=1+senθ	19π/12 0.03	5π/3 0.13	21π/12 0.29	11π/6 0.5	23π/12 0.74	2π 1	

Al unir los puntos se aprecia que la gráfica de la función tiene la forma de un corazón hacia abajo, razón por la que se llama Cardioide.

Figura 72
Gráfica del ejercicio 4



Ejercicio 5

Transformar de polares a rectangulares la función $r=a$ e identificar la curva sin necesidad de graficarla.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Reemplazando en la función

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a$$

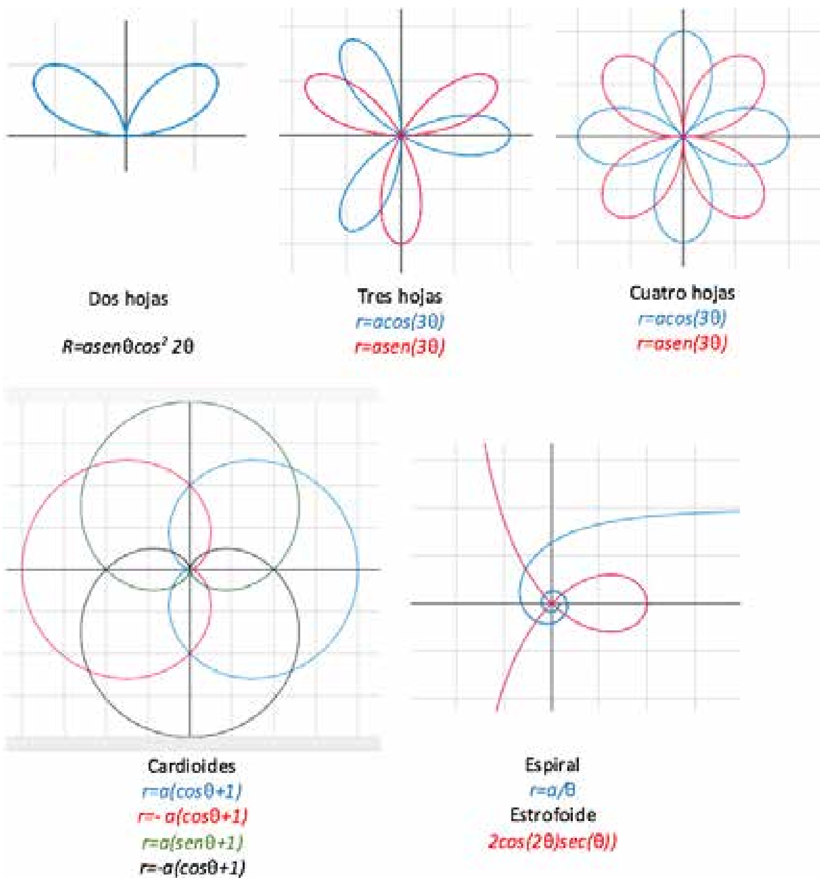
Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2$$

La función pertenece a un círculo con centro en el origen y radio *a.*

Otras gráficas en coordenadas polares se presentan a continuación:

Figura 73
Otras curvas en Polares



5.2.1 Derivadas en coordenadas polares

Para encontrar la derivada de una función en coordenadas polares se parte de las fórmulas vistas para convertir de coordenadas rectangulares a polares

$$x = rcos\theta \quad y = rsen\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d}{d\theta}(rsen\theta)}{\frac{d}{d\theta}(rcos\theta)} = \frac{rcos\theta + sen\theta\frac{dr}{d\theta}}{-rsen\theta + cos\theta\frac{dr}{d\theta}}$$

Reordenando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sen\theta\frac{dr}{d\theta} + rcos\theta}{cos\theta\frac{dr}{d\theta} - rsen\theta}$$

Existen tangentes horizontales cuando

$$sen\theta\frac{dr}{d\theta} + rcos\theta = 0$$

Existen tangentes verticales cuando

$$cos\theta\frac{dr}{d\theta} - rsen\theta$$

Ejercicio 1

Encontrar la ecuación de la tangente a la curva $r=1+sen\theta$ del ejercicio 4 sección 5.2 para $\theta=\pi/4$. Encontrar además los puntos donde hay máximos, mínimos y tangentes verticales.

Para encontrar la ecuación de la recta tangente se necesitan punto y pendiente.

La pendiente se la obtiene encontrando la derivada de la función y reemplazando en el punto pedido.

Aplicando la fórmula

$$\frac{dy}{dx}=\frac{sen\theta\frac{dr}{d\theta}+rcos\theta}{cos\theta\frac{dr}{d\theta}-rsen\theta}=\frac{sen\theta\frac{d}{d\theta}(1+sen\theta)+rcos\theta}{cos\theta\frac{d}{d\theta}(1+sen\theta)-rsen\theta}=\frac{sen\theta cos\theta+rcos\theta}{cos^2\theta-rsen\theta}$$

Para θ=π/4

$$r=1+sen\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

Reemplazando:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

El punto en coordenadas rectangulares es

$$x=rcos\theta\quad es\ decir,\ x=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$y=rsen\theta\quad es\ decir,\ y=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)sen\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

El punto es $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2},\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$

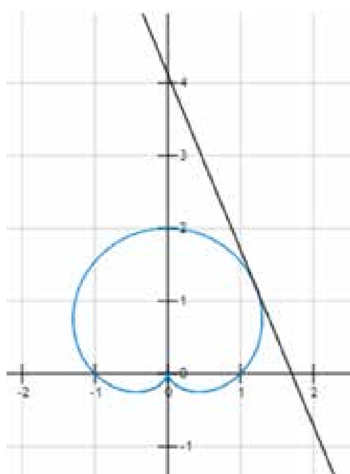
La ecuación de la recta es

$$y\text{-}y_1=m(x\text{-}x_1)\ reemplazando\ valores\ se\ tiene:\ y-\frac{\sqrt{2}+1}{2}=\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$$

Resolviendo se tiene que la ecuación de la recta tangente pedida es

$$y = -\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x + \frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$$

Figura 74
Gráfica del ejercicio 1



Pasando la ecuación rectangular a la forma polar

$$rsen\theta = -\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}rcos\theta + \frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$$

$$rsen\theta + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}rcos\theta = \frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$$

$$r\left(sen\theta + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}cos\theta\right) = \frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$$

$$r = \frac{\frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}}{sen\theta + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}cos\theta}$$

Que es la ecuación de la recta en coordenadas polares

Para encontrar tangentes horizontales, se iguala a cero el numerador de la fórmula de la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sen\theta \frac{dr}{d\theta} + rcos\theta}{cos\theta \frac{dr}{d\theta} - rsen\theta}$$

$$sen\theta \frac{dr}{d\theta} + rcos\theta = 0 \quad \rightarrow \quad sen\theta \frac{d}{d\theta}(1 + sen\theta) + (1 + sen\theta)cos\theta = 0$$

$$sen\theta cos\theta + cos\theta + sen\theta cos\theta = 0 \quad \rightarrow \quad 2sen\theta cos\theta + cos\theta = 0$$

$$cos\theta(2sen\theta + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad cos\theta = 0; \; sen\theta = -\frac{1}{2}$$

θ =7π/6, 11π/6 y π/2.

Para encontrar las tangentes verticales se iguala el denominador a cero en la fórmula de la derivada, es decir

$$cos\theta \frac{dr}{d\theta} - rsen\theta = 0 \quad \rightarrow \quad cos\theta \frac{d}{d\theta}(1 + sen\theta) - (1 + sen\theta)sen\theta = 0$$

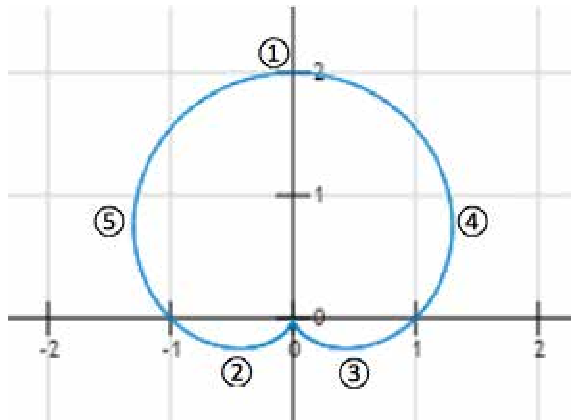
$$cos^2\theta - sen\theta - sen^2\theta = 0 \quad \rightarrow \quad cos^2\theta - sen^2\theta - sen\theta = 0 \quad \rightarrow \quad cos2\theta = sen\theta$$

Esta condición se cumple para θ=π/6 y 5π/6.

Los valores de *r* para esos ángulos se los obtiene reemplazando en la función y son

Punto	*r(θ)*
1	$r_{(\frac{\pi}{2})} = 2$
2	$r_{(\frac{7\pi}{6})} = 0.5$
3	$r_{(\frac{11\pi}{6})} = 0.5$
4	$r_{(\frac{\pi}{6})} = 1.5$
5	$r_{(\frac{5\pi}{6})} = 1.5$

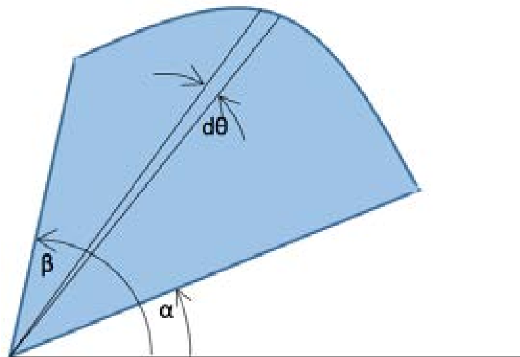
Figura 75
Puntos de tangencia horizontal y vertical



5.2.2 Áreas en coordenadas polares

El criterio para el desarrollo de la fórmula para calcular áreas en coordenadas polares es el mismo que el usado para coordenadas polares, salvo que en este caso no se usan rectángulos diferenciales sino sectores diferenciales de círculos como se ve en la figura 77.

Figura 76
Área diferencial en coordenadas polares



El área diferencial del sector es

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Por tanto, el área total es

$$A = \frac{1}{2} \int_{\propto}^{\beta} r^2 d\theta$$

Ejercicio 1

Encontrar el área dentro de la curva dada en coordenadas polares por $r=2sen3\theta$

Cálculo del área de uno de los pétalos:

Para hallar los límites de integración se hace $r=0$ en la función

$$2sen3\theta = 0 \;\; \rightarrow \;\; sen3\theta = 0 \;\; \rightarrow \;\; 3\theta = 0, \pi, 2\pi, etc$$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}. etc$$

Los límites de integración para el primer bucle entonces son 0 y π/3 y el área es

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (2sen3\theta)^2 d\theta$$

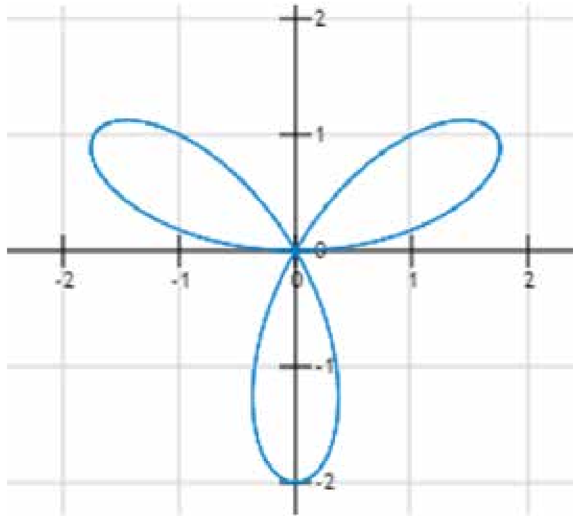
$$= 2 \int_0^{\pi/3} sen^2 3\theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2} (1 - cos6\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{3}} cos6\theta d\theta = |\theta| \begin{matrix} \frac{\pi}{3} \\ 0 \end{matrix} - \left| \frac{sen6\theta}{6} \right| \begin{matrix} \frac{\pi}{3} \\ 0 \end{matrix} = \frac{\pi}{3} - \frac{sen\left(6\frac{\pi}{3}\right)}{6} = \frac{\pi}{3} u^2$$

El área total es

$$A = 3\left(\frac{\pi}{3} u^2\right) = \pi u^2$$

Figura 77
Gráfica del ejercicio 1



Ejercicio 2

Encontrar el área dentro de la curva dada en coordenadas polares por $r=2+cos\theta$

El área de la parte superior de la curva es

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(2+cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(4+4cos\theta+cos^2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}4d\theta+\int_0^{\pi}4cos\theta d\theta+\int_0^{\pi}cos^2\theta d\theta\right]$$

$$= 2|\theta|_0^{\pi}+2|sen\theta|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1+cos2\theta)d\theta$$

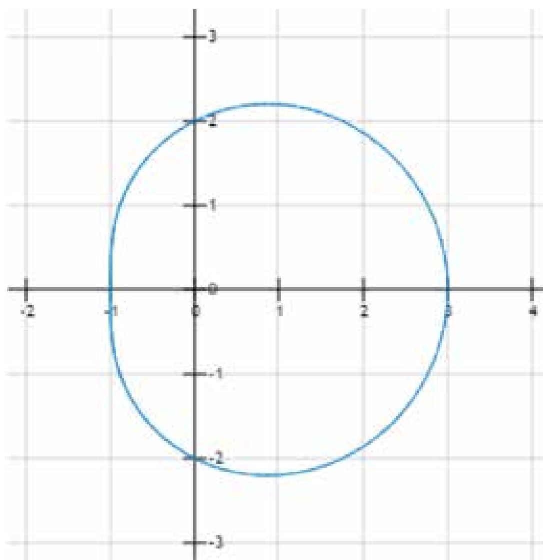
$$= 2\pi + \frac{1}{4}\left[\int_0^{\pi} d\theta + \int_0^{\pi} cos2\theta d\theta\right]$$

$$= 2\pi + \frac{\pi}{4} + \left|\frac{sen2\theta}{8}\right|_0^{\pi} = \frac{9\pi}{4}\ u^2$$

El área total es

$$A = \frac{9\pi}{2}\ u^2$$

Figura 78
Gráfica del ejercicio 2



Ejercicios propuestos sección 5.2

1. Transformar de polares a rectangulares la función *r=2acosθ* e identificar la curva sin necesidad de graficarla.

R: Ecuación de una circunferencia con centro en *(a,0)*

2. Demostrar matemáticamente que la curva dada en polares *r=acosθ+bsenθ* es un círculo cuyo centro está en $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right), r=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, corta al eje x en x en $(a,0)$ y al eje y en $(0,b)$.

3. Convertir la ecuación dada en polares por *r=senθ* a rectangulares e indicar el tipo de curva.

$$R: Círculo\ con\ centro\ en\ \left(\frac{1}{2},0\right)$$

4. Convertir la ecuación dada en rectangulares por *3x-y+2=0*

$$R: r=\frac{2}{sen\theta — 3cos\theta}$$

5. Encontrar una fórmula para la distancia entre dos puntos en coordenadas polares

$$R: \sqrt{r_2^2+r_1^2+cos(\theta_2-\theta_1)}$$

6. Calcular el área encerrada por la curva *r=4senθ*

$R: 4\pi\ u^2$

7. Calcular el área comprendida entre *r=4senθ* y *r=4cosθ*

$R: 2\pi-4\ u^2$

8. Calcular el área que se encuentra del lado exterior a la curva dada en polares por *r=6cosθ* y dentro de la curva *r=2cosθ+2*.

$R: 4\ u^2$

9. Encontrar el área encerrada por *r=sen2θ*

$R: \frac{\pi}{2}\ u^2$

10. Encontrar el área encerrada por las curvas *r=tgθsecθ* y *r=cotgθcoscθ*

$R: \frac{1}{3}\ u^2$

Tabla 5
Fórmulas de figuras geométricas comunes

	Cuadrado: $Perímetro = 4l$ $Área = l^2$		**Triángulo:** $Perímetro: a + b + c$ $Área = \frac{1}{2}bh$
	Rectángulo: $Perímetro = 2b + 2h$ $Área = bh$		**Trapecio** $Área = \left(\frac{B + b}{2}\right) h$
	Círculo $Perímetro = 2\pi r$ $Área = \pi r^2$		**Sector de Círculo** $Longitud\ de\ arco\ (S) = r\theta$ $Área = \frac{1}{2}r^2\theta$
	Cilindro circular recto $Área\ Lateral = 2\pi rh$ $Volumen = \pi r^2 h$		**Cilindro circular hueco** $Área\ Lateral\ ext = 2\pi r_2 h$ $Área\ Lateral\ int = 2\pi r_1 h$ $Volumen = \pi h(r_2^2 \text{-} r_1^2)$
	Cono $Área\ Lateral = \pi rs$ $Volumen = \frac{1}{3}\pi r^2 h$		Tronco cónico $Área\ lateral = \pi s(r_1 + r_2)$ $Volumen = \frac{1}{3}\pi(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)h$
	Esfera $Área = 4\pi r^2$ $Volumen = \frac{4}{3}\pi r^3$		

Tabla 6
Productos notables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a\text{-}b)^2 = a^2\text{-}2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a+b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2\text{-}b^3$
$(a+b)(a — b) = a^2 — b^2$	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2\text{-}ab + b^2)$	$a^3\text{-}b^3 = (a\text{-}b)(a^2 + ab + b^2)$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	

Tabla 7
Propiedades de los logaritmos

Definición: $\log_a x = y \quad \Rightarrow \quad a^y = x; a > 0\ y\ a \neq 1$	Se deduce de la definición que: No existe logaritmo que número negativo No existe logaritmo de cero
$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$
$\log_a a^n = n$	$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x — \log_a y$	$\log_a x^n = n \log_a x$
$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$	Cambio de base: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Tabla 8
Límites conocidos

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - 1}{lnx} = 1$

Tabla 9
Funciones trigonométricas

$sen\theta = \frac{CO}{HIP}$	$cosec\theta = \frac{HIP}{CO}$	HIP CO θ CA
$cos\theta = \frac{CA}{HIP}$	$sec\theta = \frac{HIP}{CA}$	
$tg\theta = \frac{CO}{CA}$	$cotg\theta = \frac{CA}{CO}$	

Tabla 10
Identidades trigonométricas

$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$	$sen(—\theta) = —sen\theta$
$tg^2\theta + 1 = sec^2\theta$	$\cos(—\theta) = cos\theta$
$1 + cotg^2\theta = csc^2\theta$	$tg(—\theta) = —tg\theta$
$sen^2\theta = \frac{1}{2}(1 - cos2\theta)$	$sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha\ cos\beta \pm cos \propto sen\beta$
$cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + cos2\theta)$	$cos(\alpha \pm \beta) = cos \propto cos\beta \mp sen\alpha\ sen\beta$
$tg^2\theta = \frac{1 - cos2\theta}{1 + cos2\theta}$	$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}$
$sen2\theta = 2sen\theta cos\theta$	$sen\alpha\ sen\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha—\beta)—cos(\alpha + \beta)]$
$cos2\theta = cos^2\theta—sen^2\theta$	$sen\alpha\ cos\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha—\beta) + sen(\alpha + \beta)]$
$tg2\theta = \frac{2tg\theta}{1 - tg^2\theta}$	$cos\alpha\ cos\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha—\beta) + cos(\alpha + \beta)]$
$sen\alpha \pm sen\beta = 2sen\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\propto \mp\beta)$	$tg\alpha\ tg\beta = \frac{tg\alpha + tg\beta}{ctg\alpha\ ctg\beta}$
$cos \propto +cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha—\beta)$	$cos\alpha\text{-}cos\beta = -2sen\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)sen\frac{1}{2}(\alpha\text{-}\beta)$
$tg \propto \pm tg\beta = \frac{sen(\alpha \pm \beta)}{cos\alpha\ cos\beta}$	

Tabla 11
Funciones hiperbólicas

$senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$tghx = \frac{senhx}{coshx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$cotghx = \frac{1}{tghx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
$sechx = \frac{1}{coshx} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$	$cosechx = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

Tabla 12
Derivadas

Derivadas	Respuesta
$\frac{d}{dx}(a)$	0
$\frac{d}{dx}(x)$	1
$\frac{d}{dx}(au)$	$a\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w)$	$\frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx}$
$\frac{d}{dx}(uv)$	$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(uvw)$	$uv\frac{dw}{dx} + vw\frac{du}{dx}uw\frac{dv}{dx}$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$	$\frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
$\frac{d}{dx}(u^n)$	$nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(lnu)$	$\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(logu)$	$\frac{loge}{u}\frac{du}{dx}$

$\frac{d}{dx}(e^u)$	$e^u\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(a^u)$	$a^u lna\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(u^u)$	$vu^{v-1}\frac{du}{dx}+lnu.u^v\frac{dv}{dx}$
Derivadas de funciones trigonométricas	
$\frac{d}{dx}(senu)$	$cosu\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(cosu)$	$-senu\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(tgu)$	$sec^2u\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(cotgu)$	$-cosec^2u\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(secu)$	$secu.tgu\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(cosecu)$	$-cosecu.cotgu\frac{du}{dx}$
Derivadas de funciones trigonométricas inversas	
$\frac{d}{dx}(arcsenu)$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(arccosu)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(arctgu)$	$\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(arccotgu)$	$-\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(arcsecu)$	$\pm\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx};(+\,para\,u>1,-para\,u<-1)$
$\frac{d}{dx}(arccosecu)$	$\mp\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx};(-\,para\,u>1,+para\,u<-1)$

Derivadas de funciones hiperbólicas	
$\frac{d}{dx}(senhu)$	$coshu\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(coshu)$	$senhu\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(tghu)$	$sec^2hu\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(cotghu)$	$—cosec^2hu\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(sechu)$	$sechu.tghu\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(cosechu)$	$—cosechu.cotghu\frac{du}{dx}$
Derivadas de funciones hiperbólicas inversas	
$\frac{d}{dx}(senh^{-1}u)$	$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(cosh^{-1}u)$	$\frac{\pm1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, u>1.\ +si\ cosh^{-1}u>0, -si\ cosh^{-1}u<0$
$\frac{d}{dx}(tgh^{-1}u)$	$\frac{1}{1-u^2}.\frac{du}{dx}, \lvert u\rvert<1$
$\frac{d}{dx}(cotgh^{-1}u)$	$\frac{1}{1-u^2}.\frac{du}{dx}, \lvert u\rvert>1$
$\frac{d}{dx}(sech^{-1}u)$	$\frac{\pm1}{u\sqrt{1-u^2}}.\frac{du}{dx}, u>1. -si\ sech^{-1}u>0, +si\ sech^{-1}u<0$

Tabla 13
Integrales

Integral de la forma	Respuesta
Integrales directas	
$\int dx$	x
$\int cdx$	cx
$\int af_{(x)}dx$	$a\int f_{(x)}dx$
$\int x^{n}dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}\ n \neq -1$
$\int \frac{dx}{lnx}$	$ln\|x\|$
$\int e^{x}dx$	e^{x}
$\int a^{x}dx$	$\frac{a^{x}}{lna}\ para\ a>0; a\neq 1$
$\int senxdx$	$-cosx$
$\int cosxdx$	$senx$
$\int sec^{2}xdx$	tgx
$\int cosec^{2}xdx$	$-cotgx$
$\int secxtgxdx$	$secx$
$\int cosecxcotgxdx$	$-cosecx$
$\int tgxdx$	$-ln\|cosx\| = ln\|secx\|$

$\int cotgxdx$	$ln\|senx\|$
$\int secxdx$	$ln\|secx + tgx\|$
$\int cosecxdx$	$ln\|cosecx — cotgx\|$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 — x^2}}$	$arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$arctg\left(\frac{x}{a}\right)$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 — a^2}}$	$\frac{1}{a}arcsen\left(\frac{\|x\|}{a}\right) = \frac{1}{a}arcos\left(\frac{a}{\|x\|}\right)$
$\int senhxdx$	$coshx$
$\int coshxdx$	$senhx$
Integrales de funciones logarítmicas y exponenciales	
$\int xa^x dx$	$\frac{a^x}{ln^2 a}\left(x — \frac{1}{lna}\right)$
$\int xe^x dx$	$e^x(x — 1)$
$\int lnxdx$	$x(lnx — 1)$
$\int xlnxdx$	$\frac{x^2}{4}(2lnx — 1)$
Integrales de funciones trigonométricas	
$\int sen^2 xdx$	$\frac{x}{2} — \frac{1}{4}sen2x$
$\int cos^2 xdx$	$\frac{x}{2} + \frac{1}{4}sen2x$
$\int tg^2 xdx$	$tgx — x$

$\int cotg^2xdx$	$-(cotgx+x)$
$\int xsenxdx$	$senx - xcosx$
$\int xcosxdx$	$cosx + xsenx$
Integrales de funciones trigonométricas inversas	
$\int arcsenxdx$	$xarcsenx+\sqrt{1-x^2}$
$\int arccosxdx$	$xarccosx$-$\sqrt{1-x^2}$
$\int arctgxdx$	$xarctgx$-$ln\sqrt{1+x^2}$
$\int arccotgxdx$	$xarccotgx+ln\sqrt{1+x^2}$
$\int arcsecxdx$	$xarcsecx - ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$
$\int arccosecxdx$	$xarccoscx+ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$
Integrales con fracciones de la forma $\frac{1}{a^2+x^2}$	
$\int \frac{dx}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right)$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$ *siempre que* $x^2>a^2$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$ *siempre que* $x^2>a^2$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2a}ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$ *siempre que* $x^2<a^2$
Integrales con radicales	
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}}$	$\frac{1}{a} ln\left\vert\frac{x}{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}\right\vert$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 — a^2}}$	$\frac{1}{a} arccos\left(\frac{a}{x}\right)$
$\int \sqrt{a^2 — x^2}\, dx$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$
$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$
Integrales de funciones hiperbólicas	
$\int sech^2 xdx$	$tghx$
$\int cosech^2 xdx$	$— cotghx$
$\int sechxtghxdx$	$— sechx$
$\int cosechxcotghxdx$	$— cosechx$
$\int tghxdx$	$lncoshx$
$\int cotghxdx$	$ln\vert senhx\vert$
$\int sechxdx$	$arctg(senhx)$
Nota: Las respuestas no incluyen la constante de integración que corresponde a una integral indefinida	

Bibliografía

Ayres, F. J. (1989). *Teoría y problemas de cálculo diferencial e integral.* Madrid, España: McGraw-Hill.

Granville, W. (2009). *Cálculo diferencial e integral.* México: Editorial Limusa S.A.

Métodos de integración. (http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo2/metodos.pdf).

Villena, M. *La integral indefinida.* Guayaquil, Ecuador.

801 ejercicios resueltos de integral indefinida.

Beer, F., Johnston, E., Aisenber, E., & y Aisenberg, E. (2010). *Mecánica vectorial para ingenieros Estática* (9na ed.). México, México: The McGraw-Hill Companies, Inc.

De Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, A., & y Ramírez, A. (2011). *Geometría Analítica* (3era ed.). México, México: PEARSON EDUCACIÓN.

Jiménez, R. (2008). *Cálculo integral* (1era ed.). México, México: PEARSON EDUCACIÓN.

Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral* (9na ed.). México, México: Pearson Educación.

Stein, S., & y Barcellos, A. (1995). *Cálculo y geometría analítica* (5ta ed.). Santafé de Bogotá, Colombia: McGraw-Hill,.

Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable. Conceptos y contextos* (4ta ed.). Ediciones Paraninfo.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas* (7ma ed.). México, México: Cengage Learning.